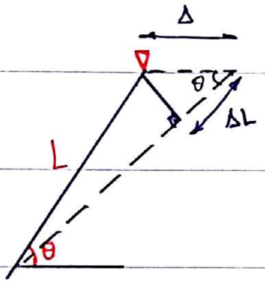
مروری بر مقاومت مصالح ۱:

می‌دانیم اجسام صلب نیستند. (خلاف استاتیک)

در استاتیک با فرض صلبیت، فقط معادلات تعادل بررسی شد و در نتیجه فقط امکان تحلیل سازه‌های معین وجود داشت. حال آنکه بسیاری از مواقع سازه‌ها نامعین است و نیاز به معادلات بیشتری داریم.

این معادلات همان { سازگاری تغییر شکل‌ها ، قانون هوک ($\sigma = E\varepsilon$) } می‌باشد.

سازگاری:



$$\Delta L = \Delta . \cos\theta$$

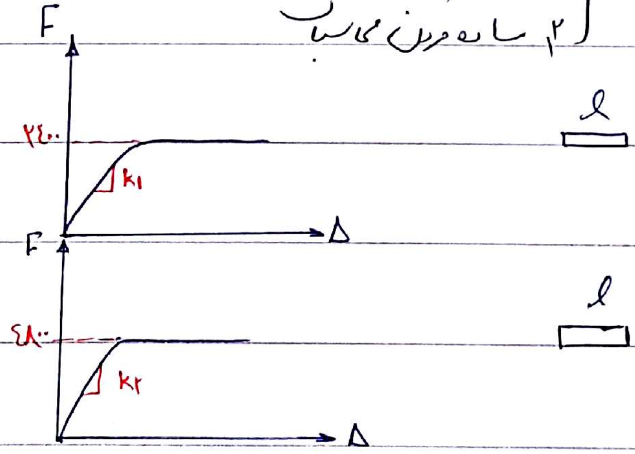
لزوم تعریف تنش: (مستقل از سطح مقطع)

الف) $\sigma = \dfrac{P}{A}$

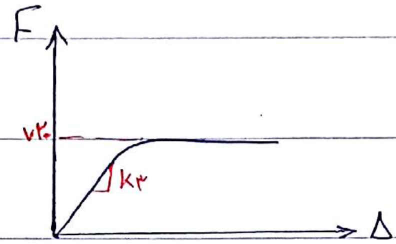
تنش به ۲ علت تعریف می‌شود:
۱) ویژگی مصالح
۲) ساده کردن محاسبات

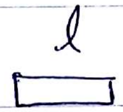
مقطع اول: $A = 1cm^2$

مقطع دوم: $A = 2cm^2$



مقطع لوله: $A = ۳cm^۲$





* بنابراین استفاده از تنش ساده‌تر است.

- حال مثالی را در نظر بگیرید که نیرو در همه ثابت است: ب)

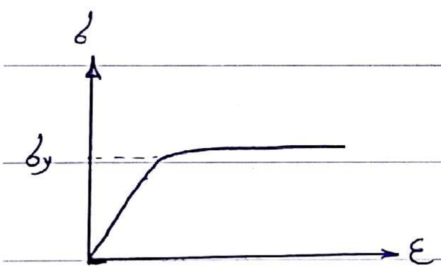
① $F, A, L = 1m \rightarrow \delta = 1mm$

② $F, A, L = ۲m \rightarrow \delta = ۲mm$

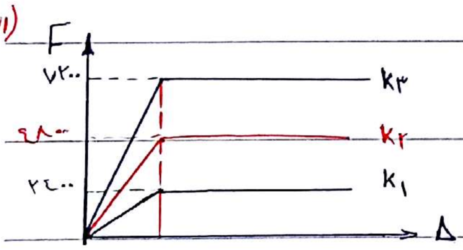
③ $F, A, L = ۳m \rightarrow \delta = ۳mm$

$$\Longrightarrow \varepsilon = \frac{\delta l}{l}$$

* در نتیجه در مقاومت مصالح نمودار تنش - کرنش تعریف می‌شود.



الف)

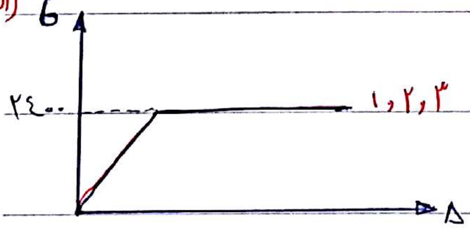


$\rightarrow (F - \Delta)$

طول‌ها برابر هستند ← $\varepsilon = \Delta$

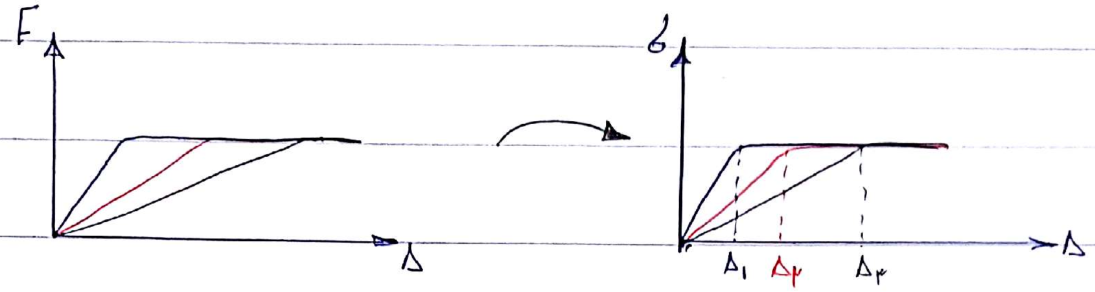
⟸ همه هم کرنش هستند.

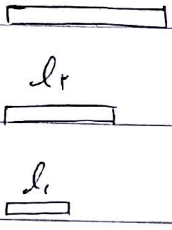
الف)



$\rightarrow (\sigma - \Delta)$ ① از ② نرم‌تر است و بیشتر کش می‌آید.

ب)





l_3 $\Delta = \Delta_3$ — میله ۳ متری به اندازه Δ_3 کش آمده است.

l_2 $\Delta = \Delta_2$ — " ۲ " " " " Δ_2 " " " .

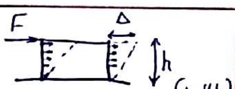
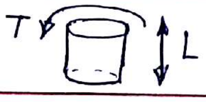
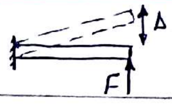
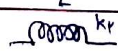
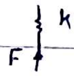
l_1 $\Delta = \Delta_1$ — " ۱ " " " " Δ_1 " " " .

$$\left(\varepsilon = \frac{\Delta_1}{l_1} = \frac{2\Delta_2}{l_2} = \frac{3\Delta_3}{l_3} \right) \Longleftarrow$$ لزوم تعریف کرنش (مستقل از طول)

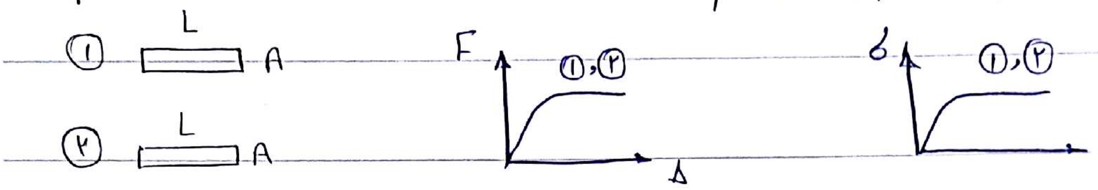
علت:
۱) کرنش از ویژگی‌های مصالح است.
۲) محاسبات ساده‌تر شود.

* نتیجه: ویژگی مصالح فقط وابسته به جنس آنها دارد نه هندسه (E)

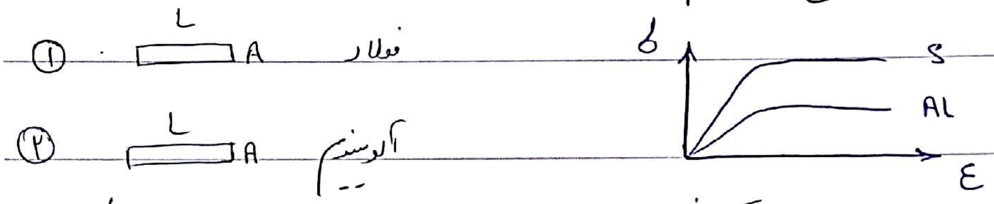
روابط تنش - کرنش: $\sigma = E\varepsilon \to \frac{P}{A} = E\frac{\delta}{L} \to \frac{P}{\delta} = \frac{AE}{L} = k =$ سختی

نوع نیرو	مود اعمال نیرو	تنش	سختی	تغییر شکل
محوری		$\sigma = \frac{P}{A}$	$k = \frac{AE}{L}$	$\delta = \frac{PL}{AE}$
برشی	 $(\Delta = \gamma h)$	$\tau = \frac{F}{A} = G\gamma$	$k = \frac{AG}{h}$	$\Delta = \delta = \frac{Fh}{AG}$
پیچشی		$\tau = \frac{Tc}{J}$	$k = \frac{GJ}{L}$	$\theta = \frac{TL}{GJ}$
خمشی		$\sigma = \frac{Mc}{I}$	الف)  ب) 	

ج) اگر ۲ میله هم طول و هم سطح مقطع و هم جنس باشند، نمودار F-Δ و σ-ε آنها روی هم می‌افتد.

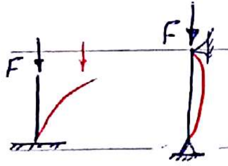


د) ۲ میله هم طول و هم سطح مقطع ولی غیر هم جنس:



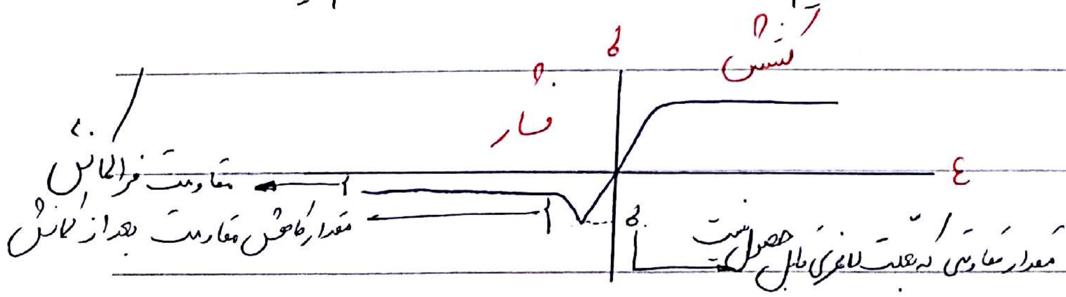
تمرین: σu و σy و E را برای ۱۰ مصالح مقابل بنویسید. (فولاد، آلومینیوم، مس، شیشه، چوب، پلاستیک، لاستیک، آهن، بتن، آجر)

سرفصل‌های مقاومت دو:
- مروری بر تنش، کرنش و دایره موهر
- دایره موهر سه بعدی
- معیارهای شکست
- تغییر شکل‌های خمشی در تیر
- پایداری در ستون‌ها (کمانش)



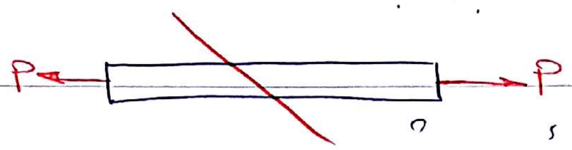
* تیر (لاغر) نمی‌تواند به اندازه کشش، فشار را تحمل کند و کمانش می‌کند.

* مقاومت تسلیم فشاری همیشه کمتر از مقاومت تسلیم کششی است. (نیروی فشاری مقاومت را کم می‌کند)

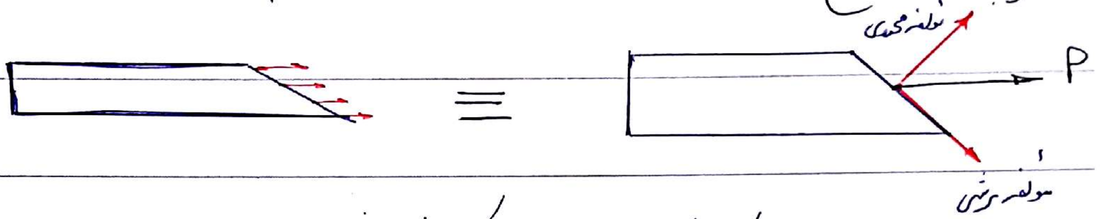


* تنش در صفحه تعریف می‌شود و در نقطه معنی ندارد.

* در تیر ساده زیر فرض کنید یک صفحه مشخص از تیر مورد بررسی می‌باشد:



در اینجا تنش از نوع محوری است که در صفحه مشخص، ۲ مولفه محوری و برشی دارد.

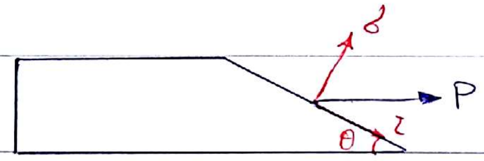


* در یک صفحه مورب هم یک تنش محوری داریم و هم یک تنش برشی

* حال هرچه صفحه مورب مورد بررسی، قائم‌تر باشد، مولفه برشی بیشتر می‌شود و بالعکس

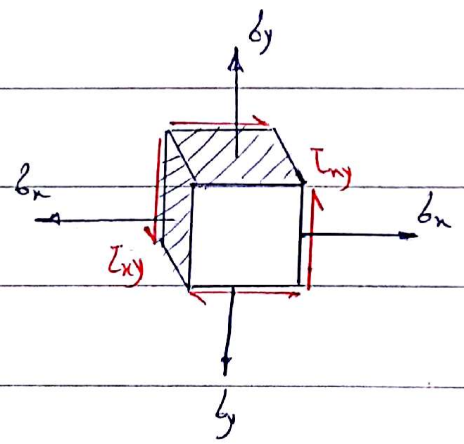
* هر نقطه ای را که درون جسم تیر در نظر بگیریم، بی‌شمار صفحه از آن می‌گذرد. بر حسب اینکه این صفحه نسبت به نیرو چه زاویه‌ای دارد، تنش محوری و برشی در این نقطه فرق می‌کند و ما به دنبال بحرانی‌ترین نقطه هستیم.

نتیجه: تنش در نقطه بی‌معنی است و در صفحه معنا دارد و سپس به دنبال بحرانی‌ترین نقطه در آن صفحه هستیم.

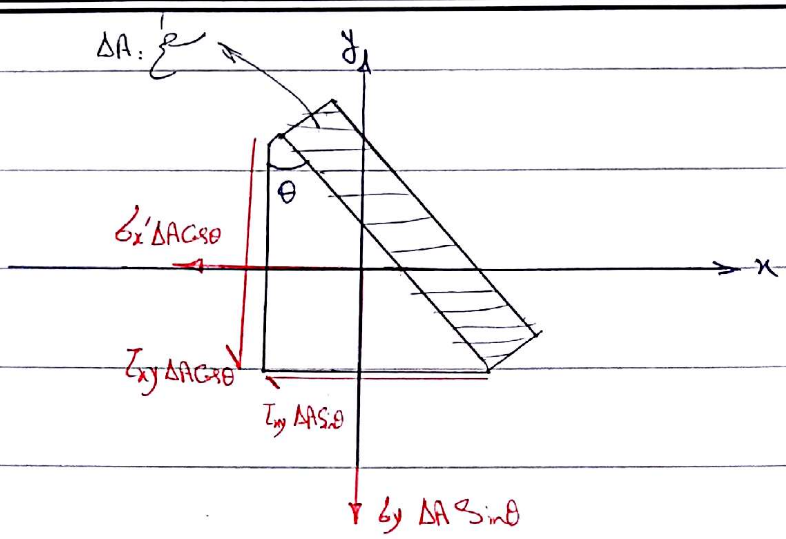


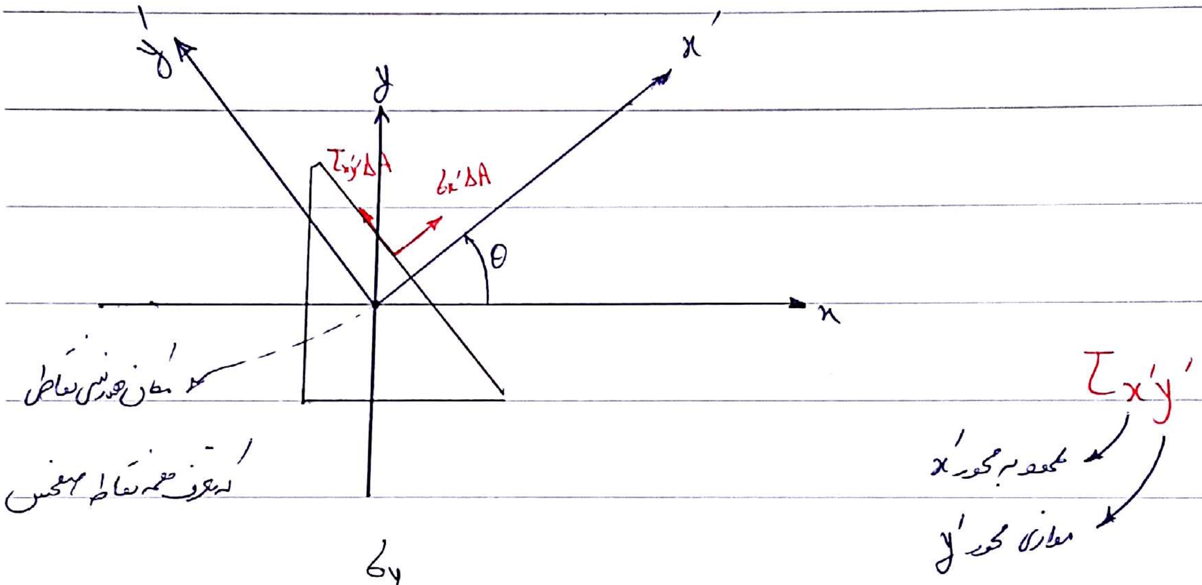
$$\sigma = \frac{P}{A}\sin^2\theta$$

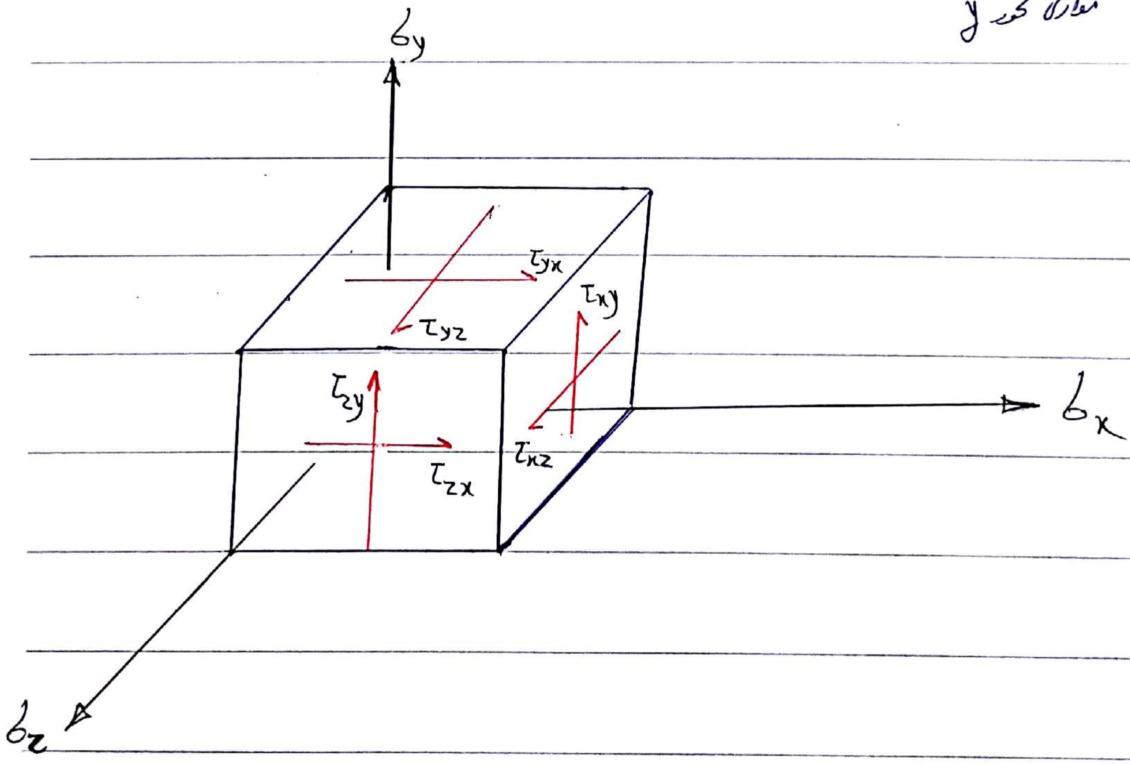
$$\tau = \frac{P\cos\theta}{\frac{A}{\sin\theta}} = \frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta$$



تبدیل تنش حرکتی:


ΔA: سطح
y
θ
x
σx' ΔA Cosθ
τxy ΔA Cosθ
τxy ΔA Sinθ
σy ΔA Sinθ


y'
x'
y
τx'y' ΔA
σx' ΔA
θ
x
مکان هندسی نقاط
τx'y'
عمود بر محور x'
موازی محور y'


σy
τyx
τyz
τxy
τzy
τzx
τxz
σx
σz

تمرین: برای این دیاگرام آزاد $\sum F_{x'}=0$ و $\sum F_{y'}=0$ را بنویسید و با استفاده از تبدیل های ساده مثلثاتی به روابط زیر برسید

معادلات تعادل

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

تبدیل تنش دوران

پایه

در مقاومت مصالح ما به دنبال این هستیم که $\sigma_{max} < \sigma_y$ و $\tau_{max} < \tau_y$ باشد.

یعنی به نحوی طراحی کنیم که در بحرانی ترین نقاط σ و τ را بدست آوریم و چک کنیم ببینیم کمتر از σ_y و τ_y هست یا نه چرا!!

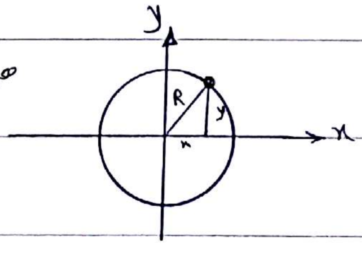
* برای بدست آوردن σ_{max} باید $\left(\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta}\right)$ را برابر صفر قرار دهیم.

* از آنجایی که محاسبات این روش سخت است، برای راحتی کار و فهم ساده‌تر از دایره موهر استفاده می‌کنیم

* $\sigma_{x\,max}$ در یک θ ای رخ می‌دهد که در همان θ، σ_y مینیمم است.

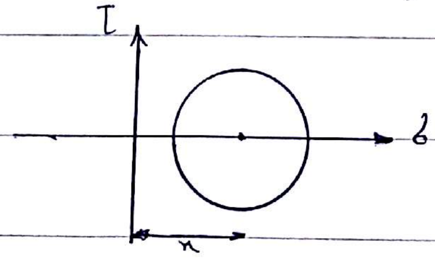
** ما دنبال این هستیم که در چه θ ای τ_{max} ماکزیمم است و مقدار آن Max چقدر است **

هندسی



$$x^2+y^2=R^2$$

* محور قائم را تنش برشی و محور افقی را تنش محوری در نظر می‌گیریم.



$$(x-a)^2+y^2=R^2$$

$$(\sigma-\sigma_{\text{میانگین}})^2+\tau^2=R^2$$

مثلثاتی : $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \sim \begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$

تمرین: روابط مهر زیر را با توجه به روابط مثلثاتی فوق بدست آورید.

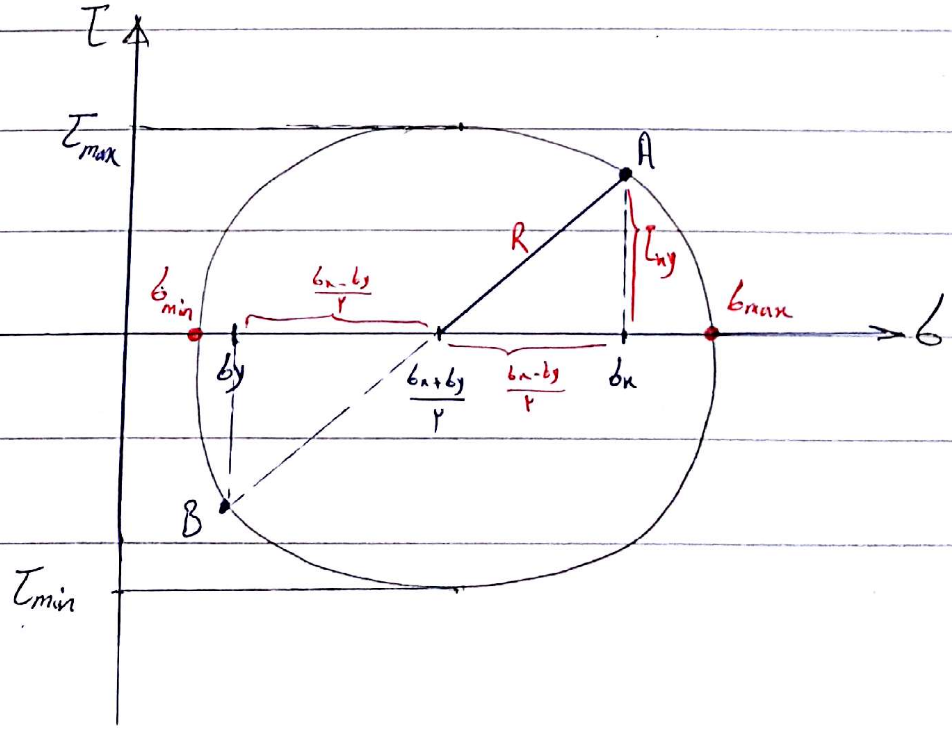
مهر: $\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\tau_{x'y'}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\tau_{xy}\right)^2$

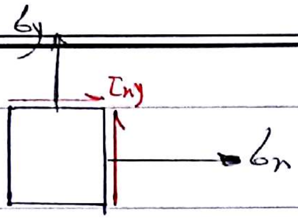
$$(x-a)^2 + (y)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\tau_{xy}\right)^2}$$

* دایره مهر : دایره‌ای به مرکز $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$ و به شعاع $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$

حال اگر همین معادله را برای $\sigma_{y'}$ نیز بنویسیم، باز هم به همین مرکز و شعاع خواهیم رسید. (۲ دایره روی هم می‌افتند) هرچند در فیزیک، σ_x و σ_y در دو جهت مخالف هستند اما در ریاضی هر دو را روی یک محور نشان می‌دهیم.





$A = \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} \sigma_y \\ -\tau_{xy} \end{vmatrix}$

* $\sigma_{ave} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$, $\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R$, $\sigma_{min} = \sigma_{ave} - R$

سوال: مرکز مختصات (۰،۰) است دما σ_x و σ_y را برحسب مبدأ مختصات بیان می‌کنیم. حال چرا موقع دوران المان، نسبت به مرکز دایره دوران میدهیم؟!!

نقطه A نشان دهنده صفحه‌ای است که σ_x بر آن اعمال می‌شود و نقطه B نشان دهنده صفحه‌ای است که σ_y بر آن اعمال می‌شود؛

نقطه A و B، ۱۸۰ درجه نسبت به هم فاصله دارند اما در فیزیک σ_x و σ_y نسبت به هم ۹۰ درجه فاصله دارند.

پس اگر در دایره موهر نسبت به مرکز دایره، 2θ درجه دوران داشته باشیم، المان ما در فیزیک θ درجه دوران میکند.

$(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$ x_0 : شیفت مرکز دایره روی محور xها به x'

در المان $\begin{cases} \sigma_x \perp \sigma_y \\ \tau_{xy} \perp \tau_{xy} \end{cases}$

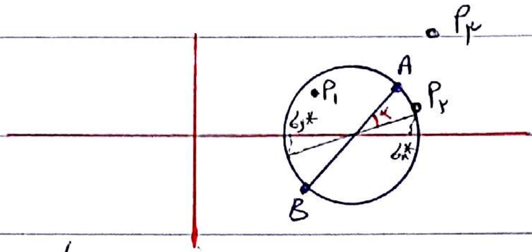
* پس مبنای رسم σ_x و σ_y و τ_{xy} مرکز مختصات (۰،۰) است ولی نسبت به مرکز دایره دوران می‌دهیم

حال به سوال پارادوکس ذیل رسیدیم:

چرا σ_x و σ_y که در فیزیک در راستای متفاوت هستند روی یک محور نشان می‌دهیم؟!!

جواب ← $\begin{cases} \sigma_x \perp \sigma_y : \text{روی یک خط نشان می‌دهیم (محور x)} \\ \tau_{xy} \perp -\tau_{xy} : \text{روی یک خط نشان می‌دهیم (محور y)} \end{cases}$

یک دایره موهر صفحه را به ۳ قسمت تقسیم می‌کند ۱) روی دایره ۲) داخل دایره ۳) بیرون دایره



P_2 : اگر المان را به اندازه $\frac{\alpha}{2}$ درجهت ساعتگرد دوران دهیم، نقطه A به اندازه α در جهت ساعتگرد دوران خواهد کرد و به P_2 خواهد رسید.

در نقطه P_2 به σ جدید (σ_x^*) می‌رسیم و تنش وارد بر المان σ_x^* خواهد بود

نکته: * هر نقطه روی دایره متناظر دو وجه روی المان است که یکی σ و دیگری τ که به آن اعمال می‌شود.

نقاط روی دایره: مکان هندسی دوران المان به مقدار دلخواه و σ و τ جدید روی المان دوران یافته

حل مجدد مجموعه صفحه (Σz)

P_1 و P_3 : فعلاً معنی ندارند.

تا به اینجا دایره موهری که خوانده‌ایم، ۲ بعدی بوده، چون المان حالت صفحه‌ای مجموعه‌ای داشت و دوران یک صفحه دوران می‌کرد. حال به بررسی دایره موهر ۳ بعدی می‌پردازیم. (یعنی هم در فیزیک ۳ بعدی هم در ریاضی)

دایره موهر در حالت کلی تنش: (دایره موهر ۳ بعدی)

اگر المان را θ درجه ساعتگرد بچرخانیم به σ_{max} و σ_{min} می‌رسیم ← τ صفر می‌شود

اما " " " " " پادساعتگرد " " τ_{max} می‌رسیم ← σ صفر نمی‌شود اما $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{ave}$

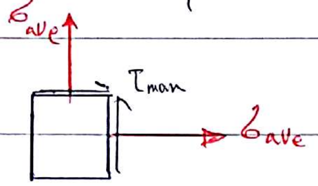
در واقع در این حالت σ و τ هر دو روی هم می‌افتند و یک نقطه می‌شوند ... !! ؟! !!

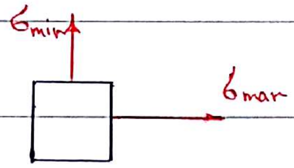
وقتی در فیزیک ۹۰ درجه نسبت به هم زاویه دارند باید در دایره ۱۸۰ درجه زاویه داشته باشند اما ۲ نقطه روی هم

نمی‌دانیم چه زاویه‌ای با هم می‌سازند !! (مهم)

درست است که زاویه برای ما مهم است. قبلاً می‌دانیم که τ ها با هم برابرند و فقط در این لحظه با هم برابرند.

* در لحظه‌ای که σ ها ماکزیمم می‌شوند، در همان لحظه روی وجه دیگر σ ها مینیمم می‌شوند و در این لحظه روی این دو وجه، تنش برشی نداریم ($\tau=0$)





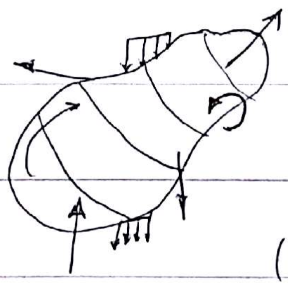
($\tau=0$)

* المان را می‌توانیم ۳ مدل دوران دهیم: ۱. حول محور x ها ۲. حول محور y ها ۳. حول محور z ها

حال می‌خواهیم دایره مور را برای حالتی از المان رسم کنیم که هم‌زمان حول هر ۳ محور مختصات دوران کند:

حالت کلی تنش: (وجود تنش روی تمام وجوه المان)

یک جسم کلی تحت نیروی دلخواه



۲ سوال مهم داریم:
۱. تنش در کدام نقطه بحرانی است؟ (بیشینه)
۲. مقدار آن تنش چقدر است؟

* در طراحی باید بتوانیم به سوال فوق پاسخ دهیم.

* داخل این جسم بی‌نهایت نقطه وجود دارد.

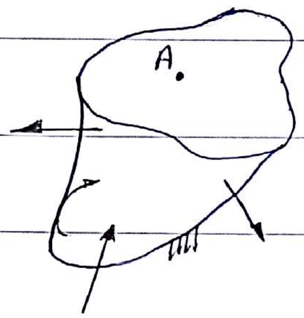
* از هر نقطه بی‌نهایت صفحه می‌گذرد ⟵ (بی‌نهایت صفحه گذرنده از هر نقطه × بی‌نهایت نقطه)

تعداد صفحات $= \underbrace{\infty}_{\text{تعداد نقطه}} \times \underbrace{\infty}_{\text{تعداد صفحه گذرنده از هر نقطه}}$

چگونه این نقطه رو پیدا کنیم؟! (نقطه‌ای که تنش در آن ماکزیمم است) ← جمله غلط ✗

تنش در کدام صفحه گذرا از آن نقطه ماکزیمم است؟ ← جمله درست ✓

چون تنش در هر صفحه و سطح معنی دارد ($\sigma = \frac{F}{A}$)



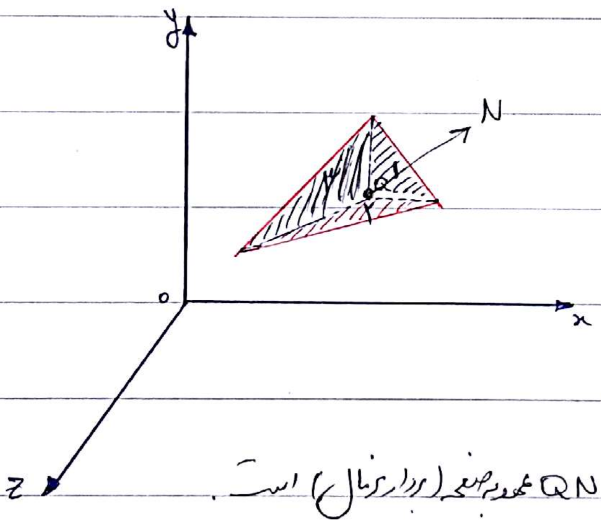
گام اول: یک نقطه دلخواه از آن بی‌نهایت نقطه را در نظر می‌گیریم (A)

گام دوم: یک صفحه دلخواه از بی‌نهایت صفحه گذرنده از A در نظر می‌گیریم

سؤال: این صفحه چه شکلی است؟

* بسته به اینکه صفحه از چه جاهایی می‌گذرد، می‌تواند اشکال متفاوتی داشته باشد.

به دلیلی که جلوتر خواهیم دید، مجدداً این صفحه را مثلثی در نظر می‌گیریم، چون حتی اگر مثلثی هم نباشد، قابل تجزیه به تعدادی مثلث می‌باشد.

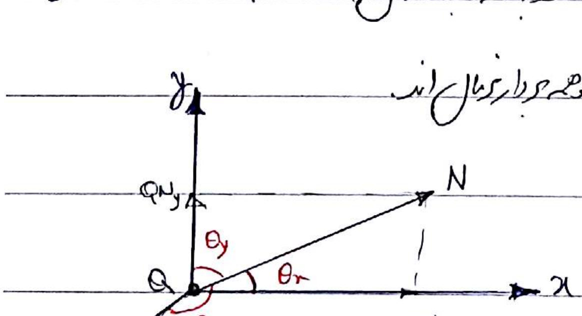


مثلث (۱) در صفحه xy
〃 〃 (۲) 〃 x-z
〃 〃 (۳) 〃 y-z

* هر کدام از مثلث‌ها، تصویر صفحه مایل اولیه هستند.

* از Q یک خط عمود می‌کنیم بر صفحه مثلث مورب: QN عمود بر صفحه (بردار نرمال) است.

تمام بردارهای عمود بر صفحه مورب موازی QN هستند و همه بردار نرمال اند.



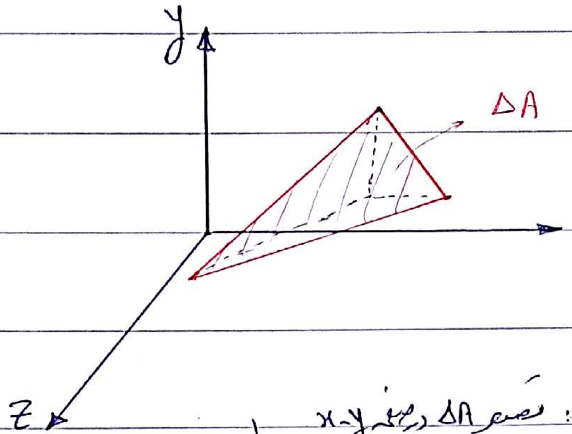
$QN_x = |QN| . \cos\theta_x$

$QN_y = |QN| . \cos\theta_y$

$QN_z = |QN| . \cos\theta_z$

بردار واحد در راستای $\vec{QN}$ $= \dfrac{\vec{QN}}{|\vec{QN}|} = \begin{Bmatrix} \cos\theta_x \\ \cos\theta_y \\ \cos\theta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{Bmatrix}$

ΔA و تصویرش در سه صفحه مختصات:



تصویر ΔA در صفحه x-y : $\Delta A.\cos\theta_z = \Delta A.\lambda_z$

x-z 〃 〃 〃 〃 : $\Delta A.\cos\theta_y = \Delta A.\lambda_y$

y-z 〃 〃 〃 〃 : $\Delta A.\cos\theta_x = \Delta A.\lambda_x$

* تصویر خط یا بردار، روی خط معنی دارد. ← (که ما روی محورهای مختصات تصویر می‌کنیم)

ولی تصویر صفحه روی صفحه معنی دارد ← یعنی تصویر یک صفحه، صفحه است. به همین دلیل ΔA را روی صفحات مختصات x-y ، y-z ، x-z تصویر می‌کنیم.

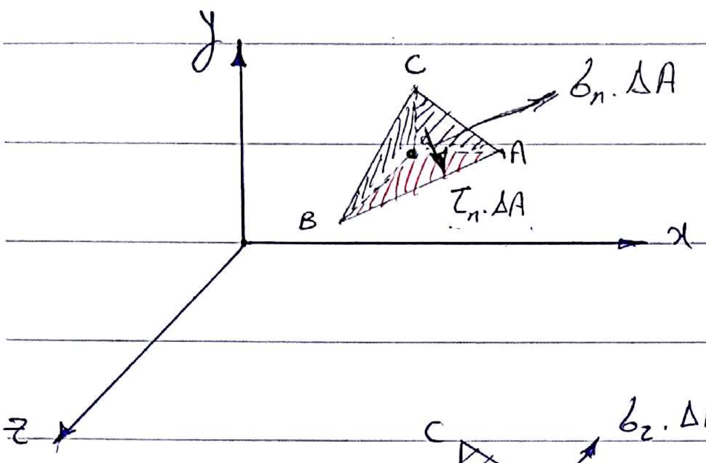
* پس اثبات کردیم که صفحه را باید با بردار عمود بر آن نشان داد.

* صفحه x-y را با محور z نشان می‌دهیم. (محور z نشانگر صفحه x-y است)

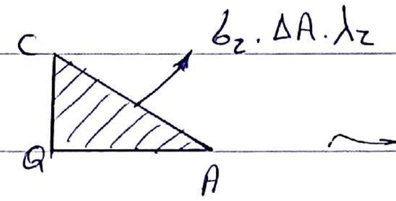
* تصویر هر صفحه روی صفحات مختصات یک مثلث قائم الزاویه است.

* حال که درک فلسفی اینکه نشان دهنده هر صفحه، بردار نرمال آن است را فهمیدیم، می‌توانیم حالت کلی تنش در صفحه را بیابیم و دایره موهر ۳ بعدی را تعریف کنیم که دایره موهر ۳ بعدی هم به ما از بی‌نهایت نقطه و هم از بی‌نهایت صفحه می‌گوید که تنش در کدام ماکزیمم است.

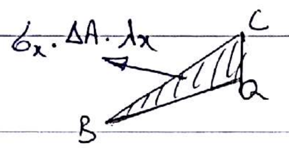
مختصات و دیاگرام آزاد:



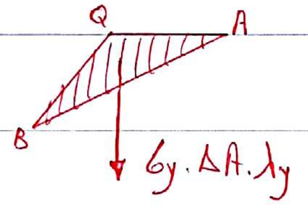
نیروهای عمود بر هر ۳ تصویر:



مساحت $= \Delta A . \lambda_z$

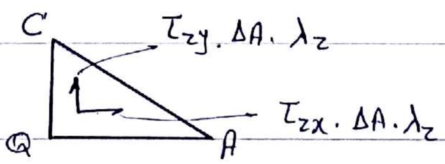


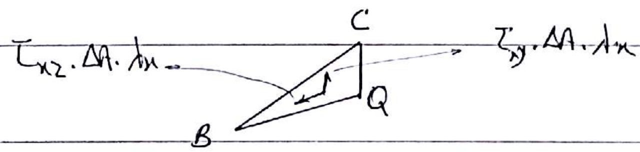
مساحت $= \Delta A . \lambda_x$

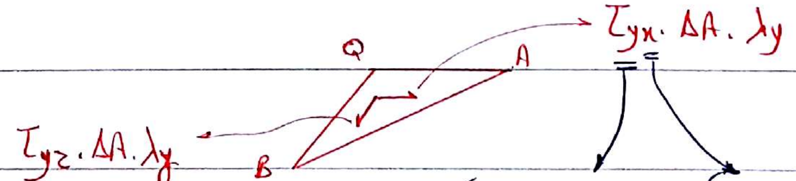


مساحت $= \Delta A . \lambda_y$

نیروهای مماسی درون صفحه‌ای:







عمود به محیط   موازی محور x

گام های حل مسئله :

۱) مشخصات

۲) دیاگرام آزاد

۳) نوشتن معادلات تعادل

۴) حل " "

حل معادله تعادل را در راستای امتداد بردار نرمال مثلث مورب می نویسیم : $\sum F_n = 0$

۴ وجه داریم ، ۴ نیروی عمود بر وجه (σ) ، ۸ نیروی مماسی در هر وجه (τ) ← کلاً ۱۲ نیرو داریم .

اما ۲ تا از τ ها که در صفحه مثلث مورب است در راستای F_n مولفه ای ندارد پس لحاظ نمی شوند .

اگر $\sum F_n = 0$ را نوشته و ادامه دهیم به رابطه زیر می رسیم :

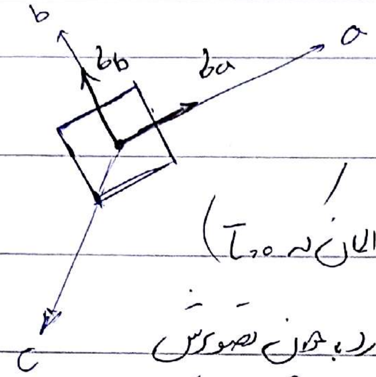
$$\sigma_n = \sigma_x \lambda_x^2 + \sigma_y \lambda_y^2 + \sigma_z \lambda_z^2 + 2\tau_{xy}\lambda_x\lambda_y + 2\tau_{xz}\lambda_x\lambda_z + 2\tau_{yz}\lambda_y\lambda_z$$

تنش های اصلی : از نقطه Q بی شمار صفحه می گذرد ، یکی از صفحه هاست که در آن امتداد تنش برشی صفر ودر آن ۳ وجه نقطه ۳ تنش نرمال داریم که با هم برابرند .

در حالتی که τ در همه صفحه های المان صفر است : $\sigma_n = \sigma_a \lambda_a^2 + \sigma_b \lambda_b^2 + \sigma_c \lambda_c^2$

تمرین : دترمینان روبرو را بدست آورید .

$$\begin{vmatrix} \sigma_x-\sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y-\sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z-\sigma \end{vmatrix}$$



کاربرد دایره مور در حالت ۳ بعدی :

دوران حول محور c .

(حالتی از المان که دو تا)

این المان به هر شکلی دوران کند، تاثیری روی محور c (صفحه c) ندارد، چون تصویرش در صفحه a-b صفر است.

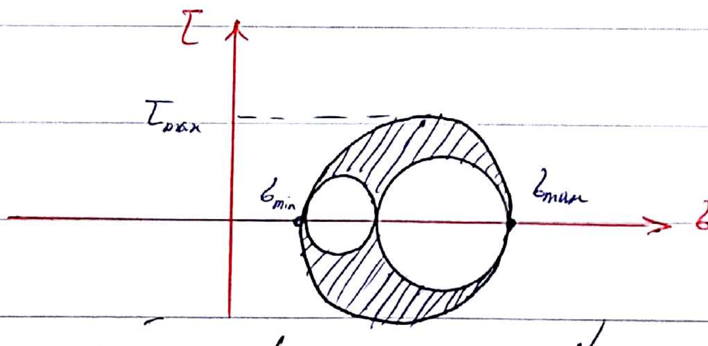
نکته *: به هر شکلی دوران کند، σ_a کم می‌شود. (در این حالت σ_c در ماکزیمم مقدار خود قرار دارد)

- حال فرض کنید المان را در دستگاه مختصات دوران داده‌ام.

اگر حول محور a دوران می‌دهیم که همان تصویر المان در صفحه b-c می‌شود.

" a-c " " " " " " " " b " " "

" a-b " " " " " " " " c " " " .



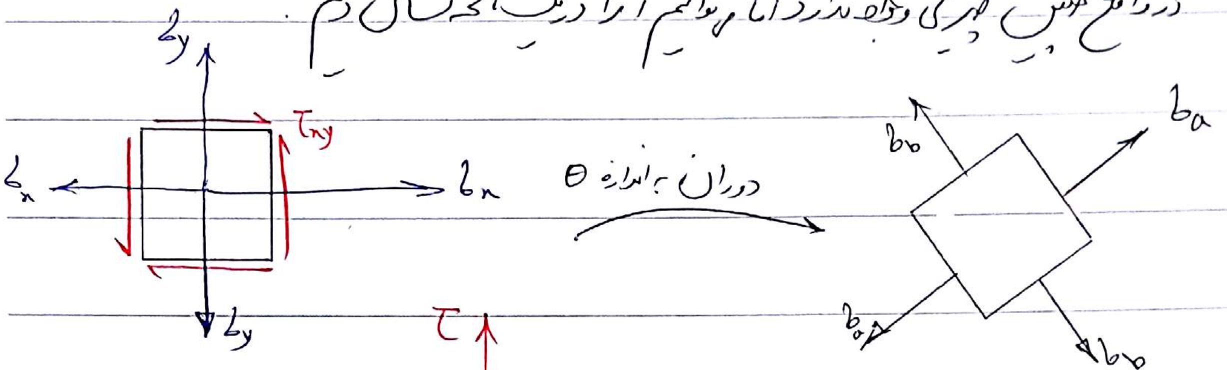
تمرین: اثبات شود منطقه هاشور خورده دربرگیرنده تمام موقعیت‌های قرارگیری المان تنش است.

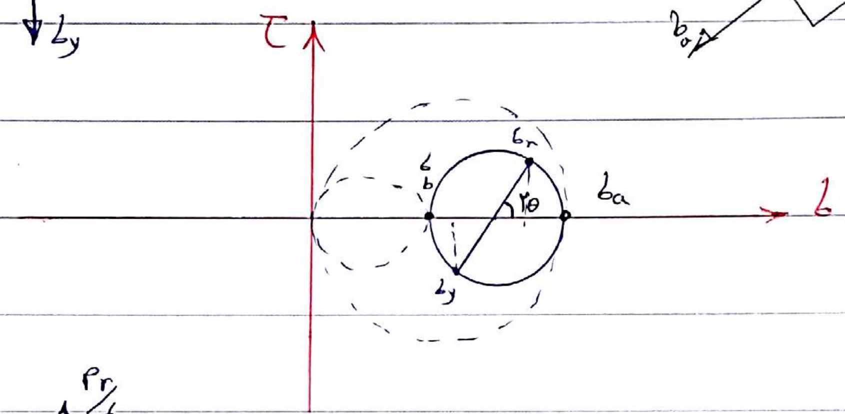
* نکته مهم:

$$R = \tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

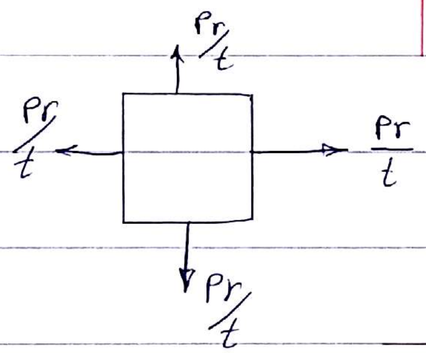
تنش صفحه‌ای (مور ۲ بعدی)

در واقع تنش فضایی وجود ندارد اما می‌توانیم آن را در یک صفحه نشان دهیم.

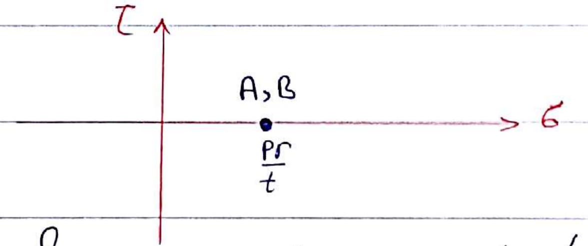




در مخازن کروی :

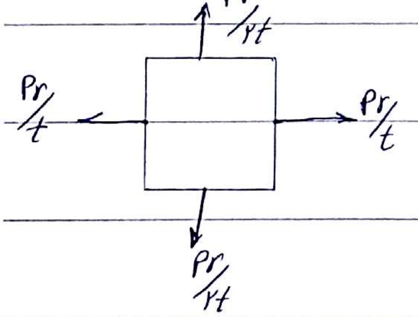


$A \left| \begin{matrix} \frac{Pr}{t} \\ 0 \end{matrix} \right. \quad , \quad B \left| \begin{matrix} \frac{Pr}{t} \\ 0 \end{matrix} \right.$

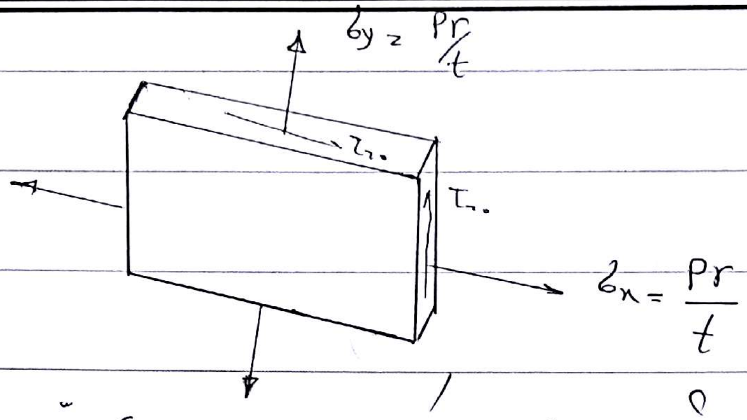


دایره مور آن یک نقطه است با تنش نرمال $\frac{Pr}{t}$ در برش صفر. با دوران المان باز هم همان یک نقطه را خواهیم داشت و نقطه فقط روی محور σ جابجا می‌شود.

در مخازن استوانه‌ای :



$A \left| \begin{matrix} \frac{Pr}{t} \\ 0 \end{matrix} \right. \quad , \quad B \left| \begin{matrix} \frac{Pr}{2t} \\ 0 \end{matrix} \right.$

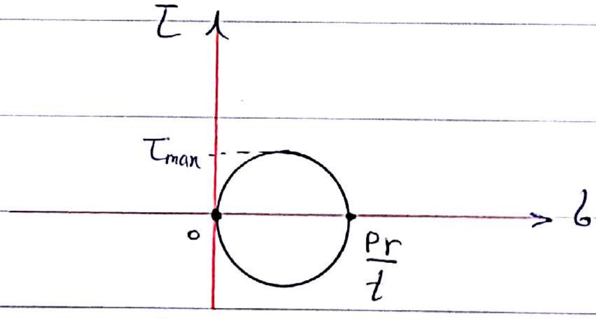


اگر فقط دوران حول محور z که رو داشته باشیم، همان مقاومت یک و دایره موهر ۲ بعدی است. اما در دایره موهر ۳ بعدی باید حول هر ۳ محور دوران دهیم.

از بالا: $\begin{vmatrix} \frac{Pr}{t} \\ 0 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \sigma_x = \frac{Pr}{t} , \tau = 0$ روی هم.

از بغل: $\begin{vmatrix} \frac{Pr}{t} \\ 0 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \sigma_y = \frac{Pr}{t} , \tau = 0$ " " ".

از روبرو: $\begin{vmatrix} \frac{Pr}{t} \\ 0 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} \frac{Pr}{t} \\ 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \sigma_x = \frac{Pr}{t} , \sigma_y = \frac{Pr}{t} , \tau = 0$ " " ".



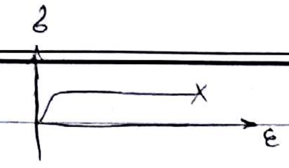
۳ دایره روی هم می‌افتند.

$$\tau_{max} = \frac{Pr}{2t} = R$$

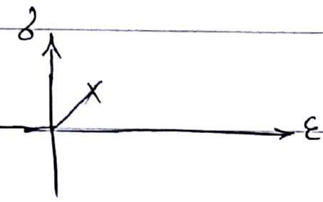
سوال: یک مخزن کروی داریم. یک المانی از آن را در نظر می‌گیریم. اگر معیار شکست این باشد که τ در هر زاویه‌ای باعث شکست المان شود، τ چقدر؟

نه!! چون به هر نحوی دورانش بدهیم، $\tau = 0$ است. اما اگر حول محور x یا y دوران بدهیم، τ ایجاد می‌شود که ماکزیمم آن $\frac{Pr}{2t}$ می‌باشد.

معیارهای شکست:



مواد ← شکل پذیر / ترد

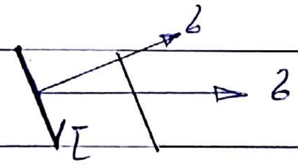


معیارهای شکست مواد شکل پذیر:

این مواد وقتی تحت بار قرار می‌گیرند، سریع دانه‌های آن می‌لغزند و یک تغییر شکل بزرگی می‌دهند و سپس به شکست می‌رسند.

ابتدا حالت تنش صفحه‌ای را در نظر می‌گیریم. در آزمایشگاه مقاومت مصالح وقتی که یک میله را تحت نیروی کششی قرار دادیم دیدیم که، تا زمانیکه $\sigma = \frac{P}{A}$ کمتر از σ_y بود ($\sigma_u \ \frac{P}{A} < \sigma_y$)، میله در حالت الاستیک قرار داشت و به محض رسیدن σ به σ_y، دو اتفاق همزمان رخ داد. اتفاق اول تغییر شکل بزرگ بدون افزایش تنش بود و اتفاق دوم گردن شدن بود. همزمان با پدیده‌ی necking و افزایش بیشتر این تغییر شکل، شکست رخ می‌دهد. (مراجعه به جزوه مقاومت یک)

تجربه نشان می‌دهد که مواد شکل پذیر وقتی دچار شکست می‌شوند که لغزش در صفحات مایل رخ دهد. یعنی آنچه مشاهدات ما از شکست مواد شکل پذیر است، رسیدن نیروی برشی (τ) به یک مقدار مشخص است که منجر به شکست برشی می‌شود.



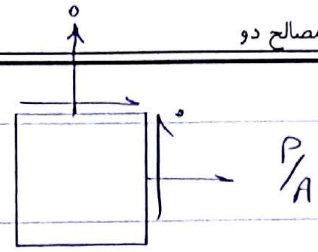
(τ باعث لغزش صفحات مایل می‌شود)

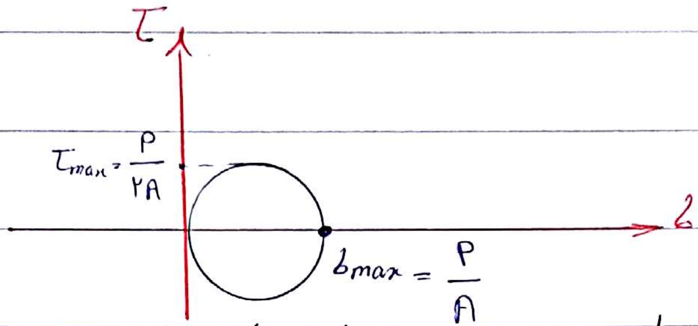
سوال: τ در مقدار متناظر با شکست چقدر است؟؟

وقتی که σ به σ_y می‌رسد، دیگر تنش افزایش نمی‌یابد و فقط تغییر شکل حاکم است.

پس در مواد شکل پذیر، تا میله σ برابر σ_y شود، می‌گوییم شکست رخ داده است.

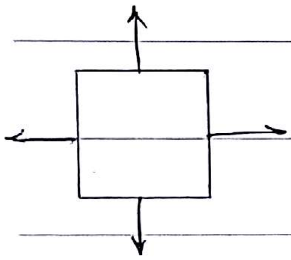
پس در دایره موهر، زمانیکه σ_{max} برابر σ_y شود، شکست رخ می‌دهد. اما اینکه بگوییم σ_{max} سبب شکست شده، حرف غلطی است؛ بلکه τ است که سبب شکست شده که مقدارش τ_{max} است.





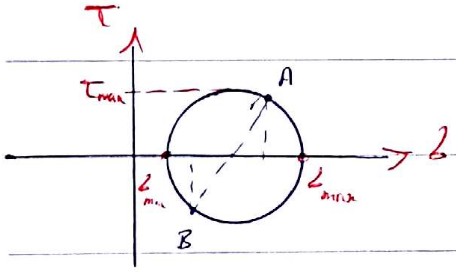
در نتیجه منطقی است که اسم معیار سلست را "تنش برشی حداکثر" بگذاریم.

این ۳ حالت تنش برای معیار تنش برشی حداکثر را بررسی می‌کنیم:



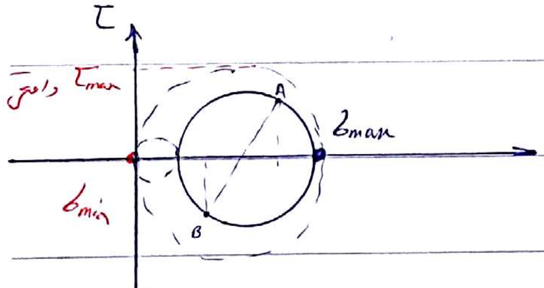
حالت I: هر دو کشش

نقطه A و B هر دو سمت راست محورند.

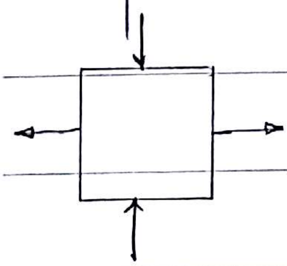


$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2}$$

(τ_{max} واقعی) در حالت ۳ بعدی:

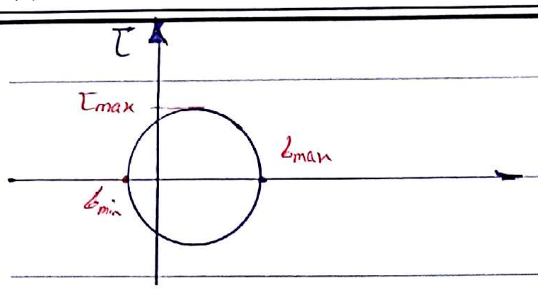


$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max}}{2}$$



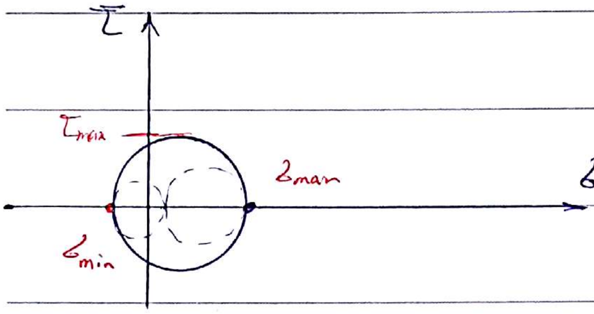
حالت II: یکی فشار یکی کشش:

نقطه A سمت راست و نقطه B سمت چپ محورند.



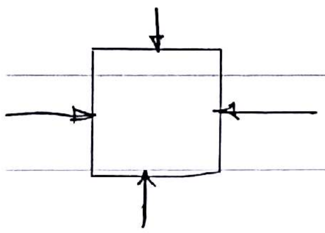
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2}$$

τ_{max} (واقعی) درحالت ۳ بعدی :

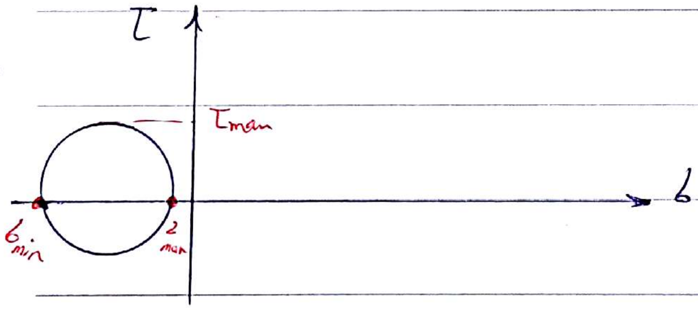


$$\tau_{max\ \text{واقعی}} = \tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

حالت III : هردو فشار :

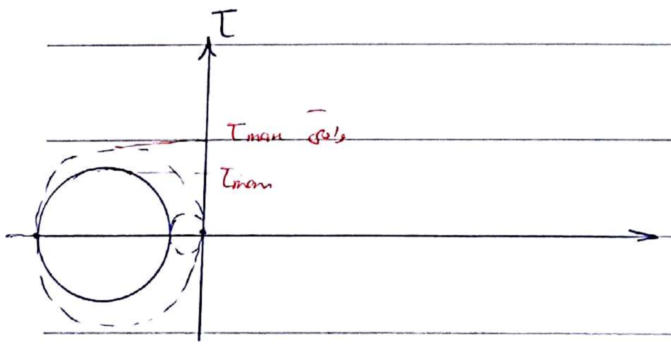


نقاط A و B هردو سمت چپ محورند



$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2}$$

τ_{max} (واقعی) درحالت ۳ بعدی :



$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_{min}|}{2}$$

اکنون می‌خواهیم یک پاسخ هندسی جالب از آنچه تا اکنون گفتیم ارائه کنیم: با توجه به اینکه مهندس فرانسوی بنام ترسکا در این حوزه اقدامات ارزشمندی انجام داده است، به آن 6 ضلعی ترسکا نیز می‌گویند.

σ ها هم علامت: $|\sigma_b| < \sigma_y$ و $|\sigma_a| < \sigma_y \Leftarrow$ ایمن

σ ها مختلف العلامه: $|\sigma_a - \sigma_b| < \sigma_y \Leftarrow$ ایمن

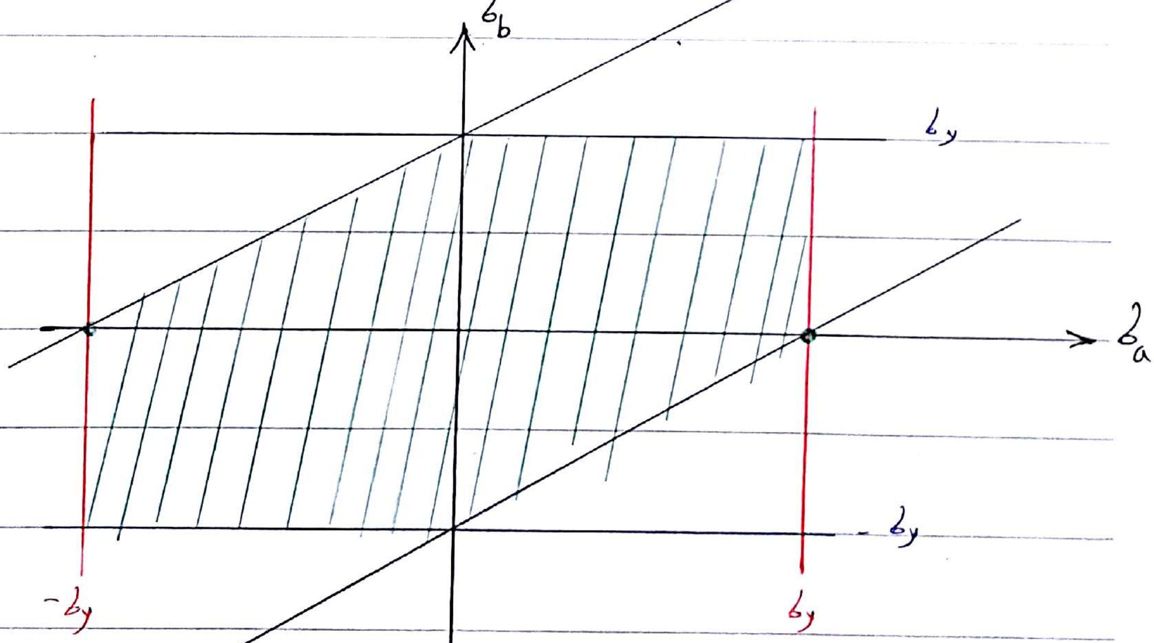
$|\sigma_a| < \sigma_y \rightarrow -\sigma_y < \sigma_a < \sigma_y$: در این حالت در منطقه ایمن هستیم شکست رخ نمی‌دهد.

اگر $\sigma_a > \sigma_y$ یا $\sigma_y < -\sigma_y$ باشد، در منطقه غیرایمن هستیم.

$|\sigma_b| < \sigma_y \rightarrow -\sigma_y < \sigma_b < \sigma_y$: در این حالت در منطقه ایمن هستیم.

$|\sigma_a - \sigma_b| < \sigma_y \rightarrow \underbrace{-\sigma_y < \overbrace{\sigma_a - \sigma_b < \sigma_y}^{(1)}}_{(2)}$: ــ ــ ــ ــ ــ ــ

۲ خط داریم: $\sigma_a - \sigma_b = \sigma_y$ و $\sigma_a - \sigma_b = -\sigma_y$. آنها را رسم می‌کنیم:



ناحیه هاشور خورده: منطقه ایمن (6 ضلعی ترسکا)

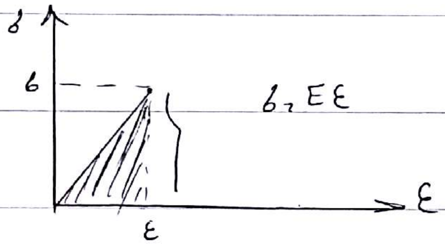
معیار انرژی (قول بالترز):

تمرین: در مقاومت یک ثابت کردیم: $u = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$ (انرژی واحد حجم) این را ثابت کنید. ۰/۵

می‌دانیم در حالت کلی: $u = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{xz}\gamma_{xz}+\tau_{yz}\gamma_{yz})$ = انرژی

$$u = \frac{1}{2E}\left(\sigma_a^2+\sigma_b^2+\sigma_c^2-2\nu(\sigma_a\sigma_b+\sigma_a\sigma_c+\sigma_b\sigma_c)\right)$$

تمرین: می‌دانیم: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ، ثابت کنید: $u_d = \frac{1}{6G}(\sigma_a^2-\sigma_a\sigma_b+\sigma_b^2)$



۰/۵
انرژی کرنشی:

کار واحد حجم $=$ کار / حجم $=$ تغییر مکان / طول $\times$ نیرو / سطح

$$S = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}(E\varepsilon)\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = u$$

۰/۵

$\Rightarrow$ انرژی کرنشی $= \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{1}{2E}\sigma^2$

$\delta = \frac{FL}{AE} \longrightarrow F = \frac{AE}{L}\cdot\delta$

(در ذات فنر) $k = \frac{F}{\Delta}$

$k = \frac{AE}{L}$

۰/۵

$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ $\Leftarrow$ به همین دلیل انرژی کرنشی است.

چون یک فنر داریم با ویژگی k . ما تغییر طول آن را به دست می آوریم و از تقسیم آن بر طول، کرنش بدست می آید.

- برای حالت کلی تنش :

$$U = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y\varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{xz}\gamma_{xz} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz}$$

می دانیم:

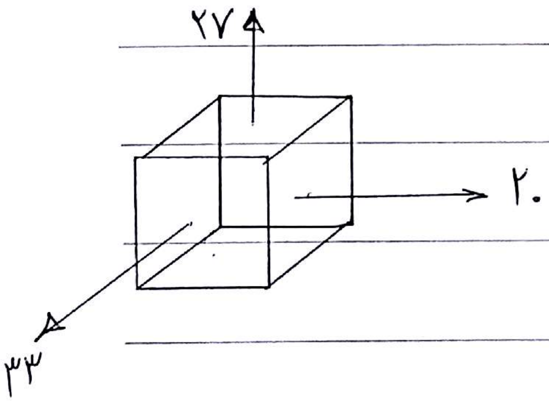
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu\sigma_y}{E} - \dfrac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\nu\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \dfrac{\nu\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu\sigma_y}{E} \end{cases}$$

با جایگذاری این معادلات در معادله انرژی خواهیم داشت :

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_z\sigma_y + \sigma_x\sigma_z)\right] + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right)$$

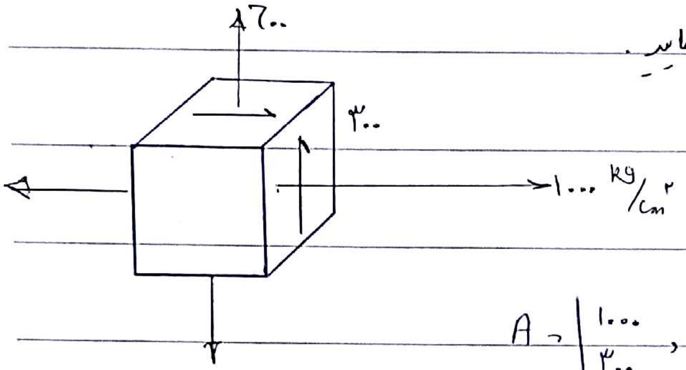
برای وقتی که تنش اصلی داریم (تنش برشی صفر است) :

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu(\sigma_a\sigma_b + \sigma_c\sigma_b)\right]$$

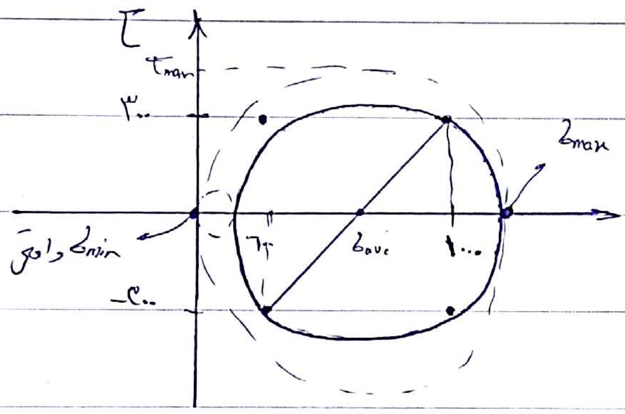


تمرین : انرژی واحد حجم برای فولاد و آلومینیوم را محاسبه کنید.

مثال: مقادیر تنش های محوری و برشی در یک المان ۲ بعدی در یکی از نقاط بحرانی یک سیستم به صورت زیر است: الف) بیشترین مقدار تنش برشی را تعیین کنید. ب) محدوده ایمن برای این نقطه را با فرض معیار شکست ترسکا و تنش تسلیم $\sigma_y = 2400\ kg/cm^2$ رسم نمایید.



$$A = \begin{vmatrix} 1000 \\ 300 \end{vmatrix} , \quad B = \begin{vmatrix} 600 \\ -300 \end{vmatrix}$$



$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 800$$

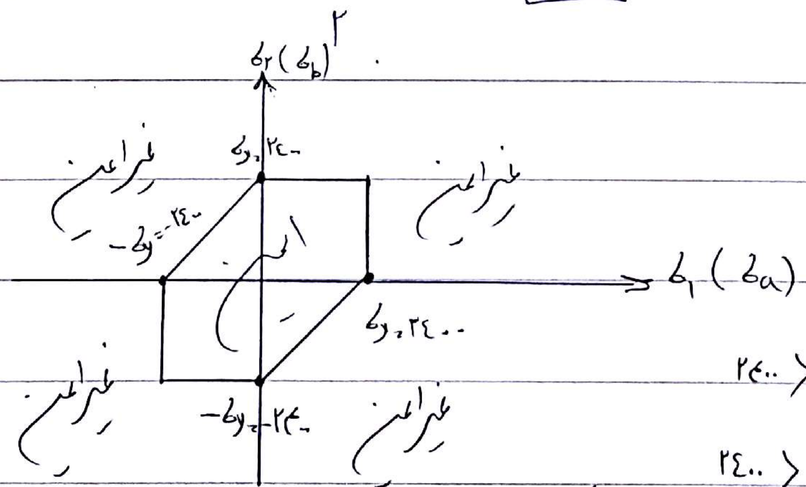
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \sqrt{(200)^2 + (300)^2}$$

$$\underline{R = \tau_{max} = 360}$$ در ۲ بعدی

$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R = 800 + 360 = 1160$$

(۲ بعدی) $\sigma_{min} = \sigma_{ave} - R = 800 - 360 = 440$

$$\tau_{max}\ \text{واقعی} = \frac{\overset{1160}{\sigma_{max}} - \overset{0}{\sigma_{min}}}{2} = \boxed{580}$$



تنش اصلی اول: $2400 > 1160$

~ دوم: $2400 > 440$

نقطه $A \begin{vmatrix} 1160 \\ 440 \end{vmatrix}$ در داخل ۶ ضلعی ترسکا قرار می‌گیرد ← در محدوده ایمن هستیم و هیچ شکستی در نقطه A رخ نمی‌دهد

$$|\sigma_1| \leq \sigma_y \longrightarrow 1160 < 2400 \checkmark$$

$$|\sigma_2| \leq \sigma_y \longrightarrow 440 < 2400 \checkmark$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_y \longrightarrow 1160 - 440 < 2400 \checkmark$$

$$\tau_{max} < \tau_y = \frac{\sigma_y}{2} \longrightarrow 580 < \frac{2400}{2} \checkmark\checkmark$$

کاملاً ایمن است.

می دانیم انرژی کرنشی برحسب تنش های اصلی عبارت است از:

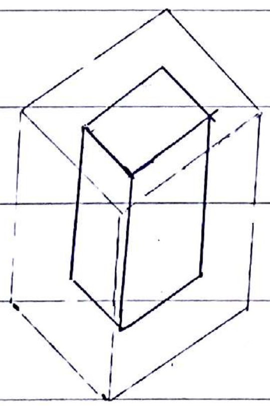
$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)\right]$$

انواع تغییر شکل در یک جسم:

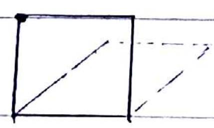
1) u_v : تغییر شکل بدون تغییر فرم (افزایش یا کاهش حجم)

2) u_d : " " " " حجم به همراه تغییر فرم

3) ترکیبی از این دو

(1) 

جسم تحت فشار یکنواخت در تمام نقاط

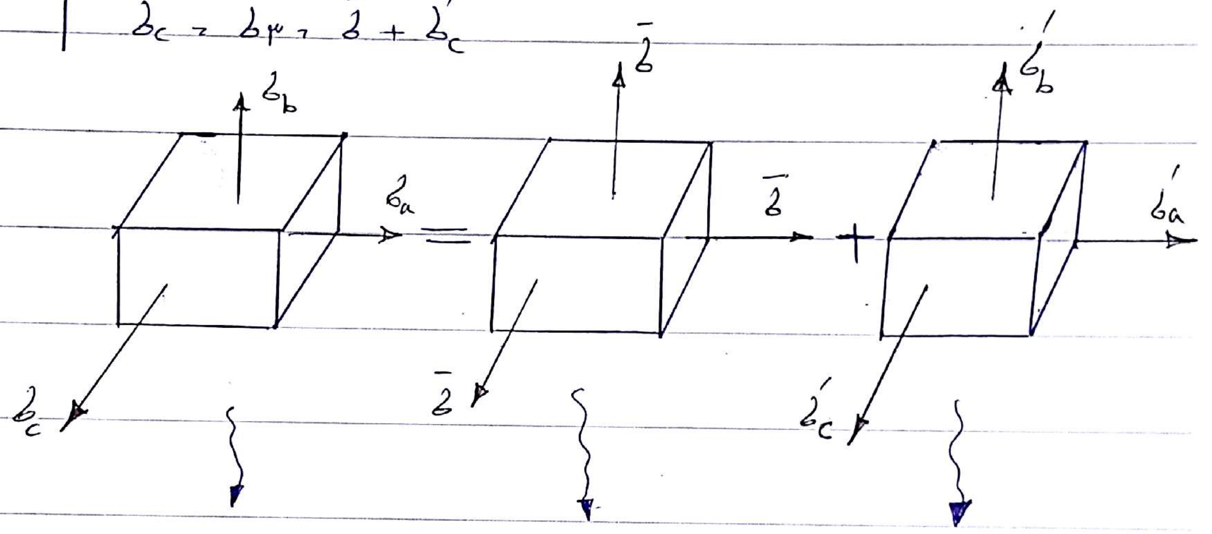
(2) 

اعوجاج یا تابیدگی

$$U = U_v + U_d$$

U را از قبل می‌دانیم، حال به دنبال U_v و U_d هستیم. ابتدا تنش‌ها را به گونه‌ای تفکیک می‌کنیم که به نحو زیر فرض شود:

$$\begin{cases} \sigma_a = \sigma_1 = \bar{\sigma} + \sigma'_a \\ \sigma_b = \sigma_2 = \bar{\sigma} + \sigma'_b \\ \sigma_c = \sigma_3 = \bar{\sigma} + \sigma'_c \end{cases}$$



$$U = U_v + U_d$$

تمرین: اثبات کنید در حالت دوم که فقط تغییر شکل به صورت اعوجاجی است، مقدار انرژی چقدر است؟

آیا در این حالت تغییر حجم داریم؟ چرا؟

U_v را محاسبه کنید.

$\bar{\sigma}$ را تفسیر کنید. بر اساس این تفسیر اسم مناسب برای $\bar{\sigma}$ چیست؟

معادل‌های $\bar{\sigma}$ را در طبیعت مثال بزنید.

۲ رابطه زیر را اثبات کنید.

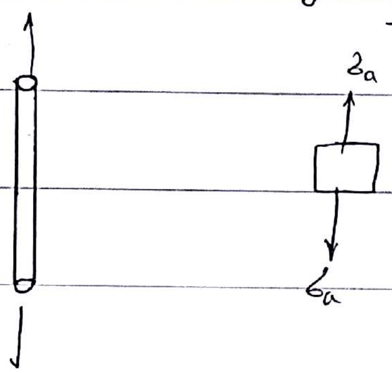
$$\begin{cases} U_v = \dfrac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c\right)^2 \\ U_d = \dfrac{1}{12G}\left[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_a - \sigma_c)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2\right] \end{cases}$$

برای حالت ۲ بعدی خواهیم داشت: $(\sigma_c = 0)$

$$u_v = \frac{1-2\nu}{6E}\left[\sigma_a + \sigma_b\right]^2$$

$$u_d = \frac{1}{6G}\left(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - \sigma_a\sigma_b\right)$$

در آزمایش کشش ساده میله می‌دانیم فقط یک تنش به میله وارد می‌شود.



$\sim (\sigma_b = 0)$

زمانیکه σ_a به σ_y برسد، میله به شکست می‌رسد.

$$(\sigma_a = \sigma_y) \longrightarrow u_d = \frac{1}{6G}\left(\sigma_y^2 + 0 + 0\right) = \frac{\sigma_y^2}{6G}$$

$$\Rightarrow (u_d)_y = \frac{\sigma_y^2}{6G}$$

تا زمانیکه $u_d < (u_d)_y$ برقرار باشد، در محدوده امن هستیم.

حال اگر دو تنش σ_a و σ_b وجود داشته باشد، u_d برابر است با $\frac{1}{6G}\left(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - \sigma_a\sigma_b\right)$

در این حالت هم اگر u_d به $\frac{\sigma_y^2}{6G}$ برسد، به شکست خواهیم رسید.

یعنی انرژی از $(u_d)_y = \frac{\sigma_y^2}{6G}$ نمی‌تواند بیشتر شود.

مادامیکه u_d کمتر از $\frac{\sigma_y^2}{6G}$ باشد، قطعه ایمن است (چه تنش ۱ بعدی باشد چه ۲، ۳ بعدی)

ایمن: $\frac{1}{6G}\left(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - \sigma_a\sigma_b\right) < \frac{\sigma_y^2}{6G}$

با ساده کردن $\frac{1}{6G}$ از دو طرف : $\sigma_a^2+\sigma_b^2-\sigma_a\sigma_b \leq \sigma_y^2$

برای حالت ۳ بعدی داشتیم : $u_d = \frac{1}{12G}\left((\sigma_a-\sigma_b)^2+(\sigma_b-\sigma_c)^2+(\sigma_a-\sigma_c)^2\right)$

این هم کمتر از $\frac{\sigma_y^2}{6G}$ می باشد، پس :

$$(\sigma_a-\sigma_b)^2+(\sigma_b-\sigma_c)^2+(\sigma_a-\sigma_c)^2 \leq 2\sigma_y^2$$

$$\rightarrow \quad \sigma_a^2+\sigma_b^2+\sigma_c^2-\sigma_a\sigma_b-\sigma_b\sigma_c-\sigma_a\sigma_c \leq \sigma_y^2$$

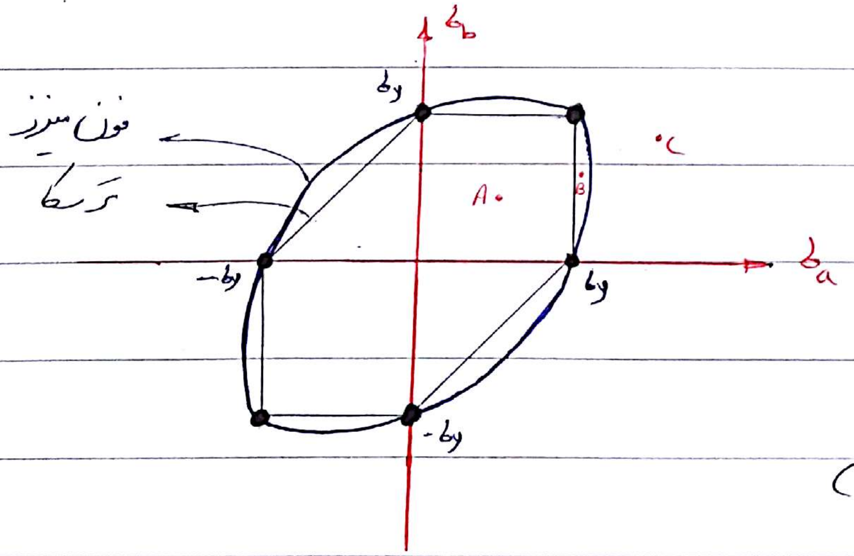
تمام اینها هستند :

$$\begin{cases} \text{تسلیم :} & \sigma_a^2+\sigma_b^2-\sigma_a\sigma_b = \sigma_y^2 \\ \text{ایمن :} & \sigma_a^2+\sigma_b^2-\sigma_a\sigma_b < \sigma_y^2 \\ \text{ناایمن :} & \sigma_a^2+\sigma_b^2-\sigma_a\sigma_b > \sigma_y^2 \end{cases}$$

فرض : $(\sigma_b=0) \longrightarrow \sigma_a=\sigma_y \longrightarrow$ یک نقطه روی محور

" : $(\sigma_a=0) \longrightarrow \sigma_b=\sigma_y \longrightarrow$ " " " "

" : $(\sigma_a=\sigma_b=\sigma_y) \longrightarrow \sigma_a=\sigma_b=-\sigma_y \longrightarrow$ دو " " "



معیار انرژی یا فون میزز :

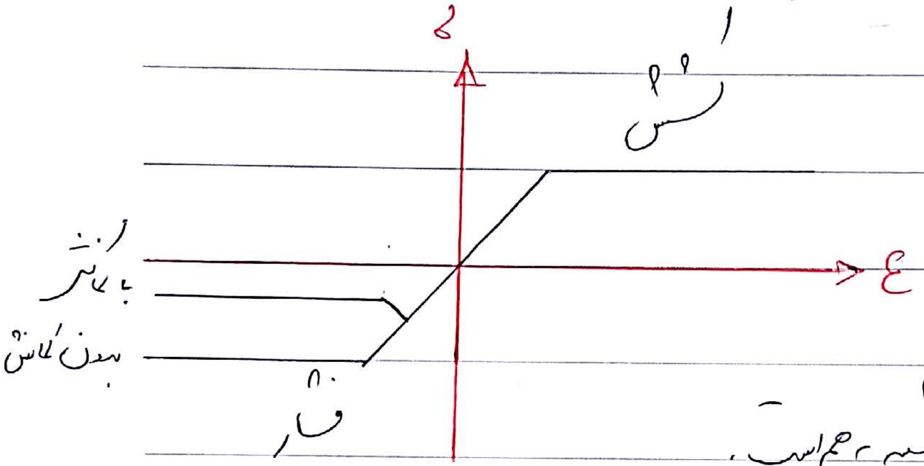
داخل بیضی ← ایمن

خارج " ← ناایمن

در مجموع ترسکا از فون میزز محافظه‌کارانه‌تر است و در واقعیت و مهندسی، فون میزز مورد نظر و استفاده است. یعنی نقطه‌ای که ایمن است در صد در صد ترسکا هم بگوید ایمن است.

معیار شکست برای مواد ترد: کولمب / مور ـ کولمب

فولاد:



رفتار فولاد در کشش و فشار شبیه هم است.

مواد نرم ذاتاً مقاومت کششی‌شان با مقاومت فشاری آنها برابر است.

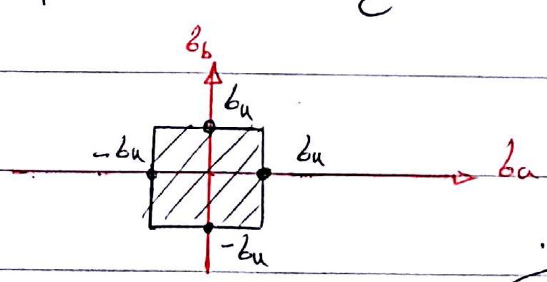
اما مواد ترد این‌طور نیستند.

مقاومت فشاری بتن ۱۰٪ فولاد است ($200\ kg/cm^2$)
〃 کششی 〃 ۱٪ 〃 〃 ($20\ kg/cm^2$)

* مواد ترد همیشه در جهت کشش ضعیف‌ترند.

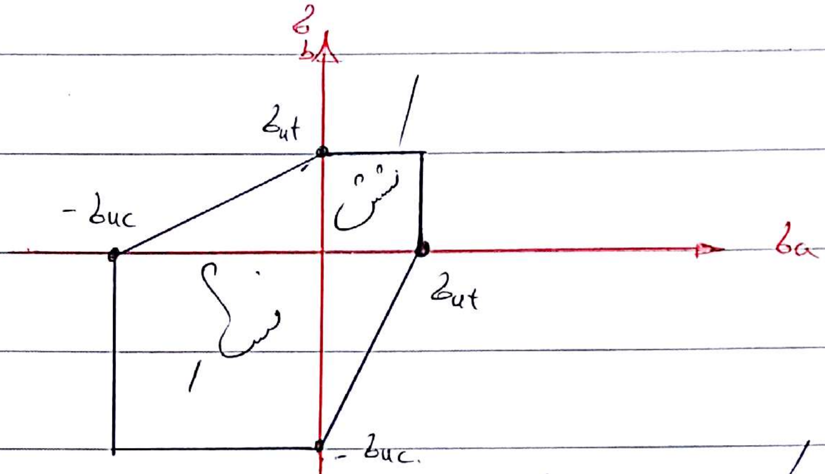
* مقاومت کششی و فشاری مواد ترد از هم فرق دارند. مدول یانگ‌های آنها هم تقریباً برابر است.

معیار کولمب: کولمب فرض کرد مصالح ترد در کشش و فشار مثل هم‌اند. که فرض غلط بود.



داخل سطح کولمب: ایمن
خارج سطح کولمب: ناایمن

معیار مور - کولمب : مور معیار کولمب را اصلاح کرد . اولی : کشش و فشار در مواد ترد با هم فرق دارند .



تمرین : در معیار مور - کولمب خط های مورب چگونه بدست آمده است ؟

ترکیبات بارگذاری :

بارگذاری ترکیبی است که ترکیبی از تنش های زیر حاصل شود ؛

$\sigma = \frac{MC}{I}$ ← محوری ناشی از خمش

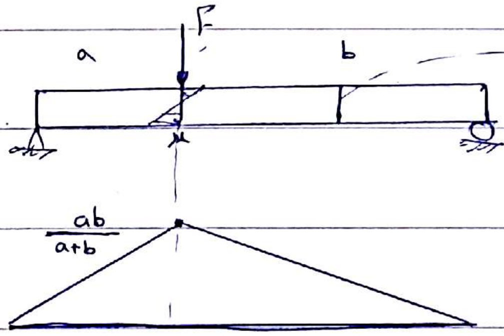
$\sigma = \frac{P}{A}$ ← " " " محوری

$\tau = \frac{VQ}{It}$ ← برشی " " برش عرضی

$\tau = \frac{Tc}{J}$ ← " " " پیچش

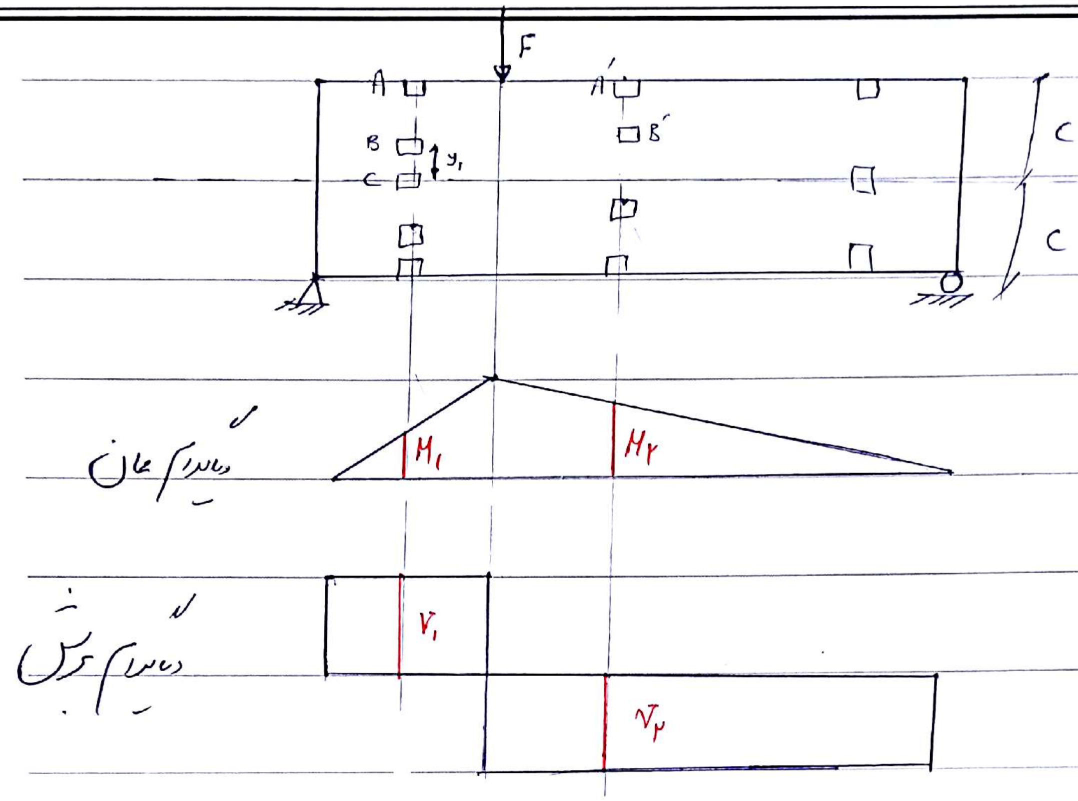
$\tau = \frac{F}{A}$ ← " " " برش

در مقطع x ممان بیشینه است .



$\tau = \frac{VQ}{It}$

دیاگرام ممان



نقطه A : $Q=0 \longrightarrow \tau = \dfrac{VQ}{It} = 0$ (V داریم)

$$\sigma = \frac{M_1 C}{I}$$

نقطه B : $\tau = \dfrac{V_1 Q}{It}$

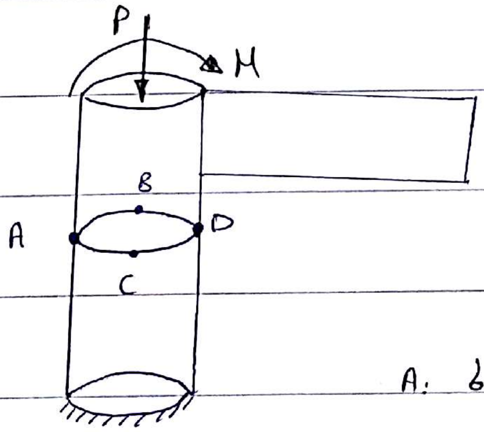
$$\sigma = \frac{M_1 y_1}{I}$$

نقطه C : $\tau = \dfrac{V_1 Q}{It} = \dfrac{1.5 V_1}{2ct}$

$$\sigma = 0$$

نقطه A' : $\tau = 0$

$$\sigma = \frac{M_2 C}{I}$$



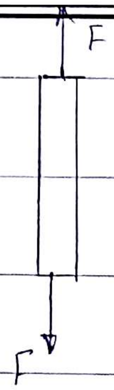
در همه نقاط : $\sigma = \dfrac{P}{A}$ را داریم.

در نقطه A و D : $\sigma = \dfrac{MC}{I}$ هم داریم.

$$A:\ \sigma = \frac{P}{A} - \frac{MC}{I} \quad , \quad D:\ \sigma = \frac{P}{A} + \frac{MC}{I}$$

در نقاط B و C ← $\dfrac{VQ}{It}$ داریم.

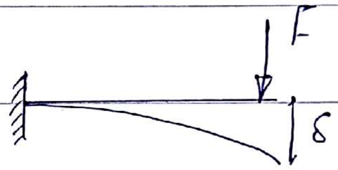
تغییر شکل خمشی تیرها:

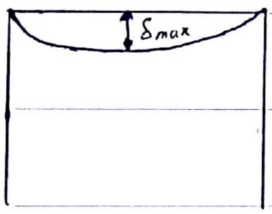


محوری : $K=\frac{AE}{L}=\frac{F}{\delta}$

پیچشی : $\tau=\frac{TC}{J}$ ، $\varphi=\frac{TL}{GJ}$ $\longrightarrow$ $k=\frac{CG}{L}$

خمشی : $\frac{F}{\delta}=?$

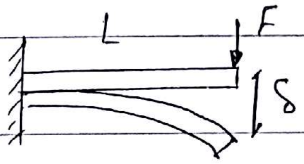




در این فصل تغییر شکل به دلیل خمش را محاسبه خواهیم کرد.

تغییر شکل زیاد:
- استاتیکی : آسایش روانی نداریم / کارکرد هم ندارد
- دینامیکی : منجر به خستگی و در نهایت شکست می‌شود.

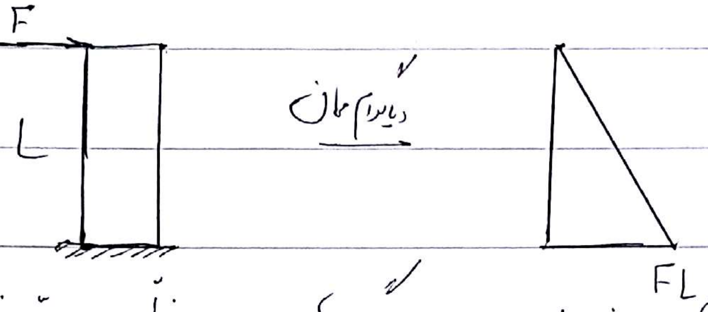
باید چک کنیم که δ_{max} از δ_{all} بیشتر نباشد. $(\delta_{max} < \delta_{all})$



<u>اثبات می‌کنیم</u>

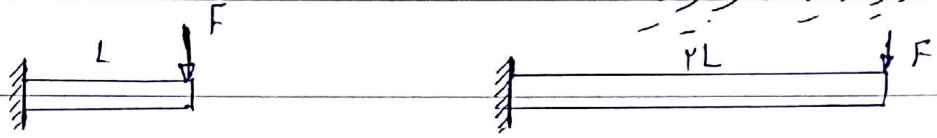
$$\delta=\frac{FL^3}{3EI}$$

$$k=\frac{F}{\delta}=\frac{3EI}{L^3} \quad \text{(سختی خمشی)}$$



تا اینجا در همه تغییر شکل ها توان L، ۱ بود، در دیاگرام های ممان هم خطی بودند. اما تنش خمشی همه این معادلات را بر هم میزنند.

۲ تیر یک سر گیردار زیر را در نظر بگیرید:



(۱) (۲)

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{VQ}{It}$$

$$2\sigma_1 = \sigma_2 \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \dfrac{(FL)c}{I} \\ \sigma_2 = \dfrac{(F(2L))c}{I} \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = \dfrac{FL^3}{3EI} \\ \delta_2 = \dfrac{8FL^3}{3EI} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 8\delta_1 = \delta_2$$

فرض کنید تیر (۱)، 1cm تغییر شکل بدهد و بنا این باشد که تیر نباید از 5cm بیشتر تغییر شکل بدهد:

تیر (۱) : $1cm < 5cm \longrightarrow$ ایمن

تیر (۲) : $8cm \not< 5cm \longrightarrow$ شکست رخ میدهد

تا اینجا برای طراحی و ایمنی، تنش ها را مقایسه میکردیم که از حد کمتر باشد؛ حال اگر بارگذاری خمشی باشد علاوه بر تنش، تغییر شکل هم باید بررسی شود.

در مقاومت یک داشتیم:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

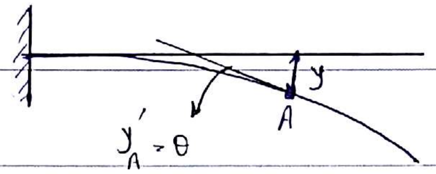
هم چنین در ریاضی ۲ متوجه شدیم:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} \simeq y'' \quad (y' \ll 1)$$

از این دو نتیجه می‌گیریم:

$$y'' = \frac{M}{EI}$$

(M، همان در هر نقطه از تیر)



انتگرال دوبل:

$$y''_{(x)} = \frac{M}{EI} \xrightarrow{\int} y'_{(x)} = \int \frac{M}{EI}\, dx$$

۲ بار انتگرال گیری از y'':

$$\xrightarrow{\int} y = \int y'$$

تمرین: به روش انتگرال گیری دوبل شکل تغییر شکل یافته و δ_{max} یک تیر یک سر گیردار را محاسبه کنید.

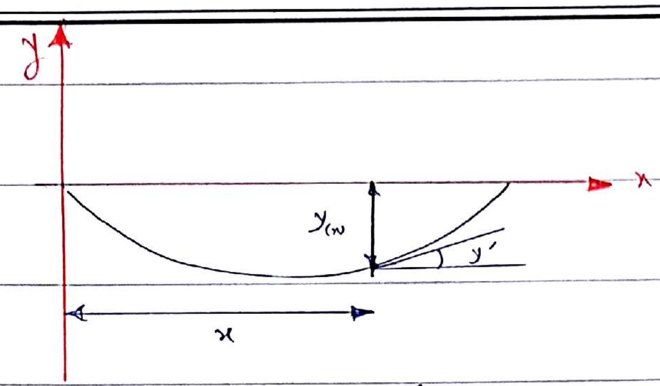
نکته: در $EIy'' = M$، M همان ممان تیر است که تابعی است از x.

تعیین تغییر شکل تیرها از روش انتگرال گیری:

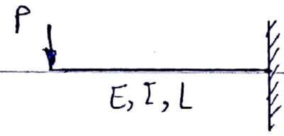
$$y'' = \frac{M}{EI}$$

$$EIy'' = M \xrightarrow{\int} EIy' = \int_0^x M_{(x)}\, dx + C = A$$

$$\xrightarrow{\int} EIy = \int_0^x A\, dx$$



مثال: تیر یک سرگیردار روبرو داده شده. تابع تغییر شکل تیر چیست؟

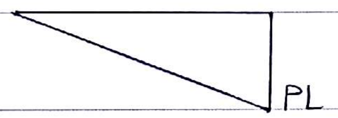


گام ۱: رسم دیاگرام ممان

گام ۲: انتگرال از EIy''

گام ۳: " " " EIy'

دیاگرام ممان:



مقطع ۱: P x M $\rightarrow \oplus \sum M = 0 \rightarrow M = -Px$

انتگرال اول:

$$EIy' = \int_0^x M(x)\,dx + C_1 = \int_0^x -Px\,dx + C_1 = \frac{-Px^2}{2} + C_1$$

می‌دانیم y' در $x=L$ برابر صفر است.

$$\xrightarrow{x=L} \frac{-PL^2}{2} + C_1 = 0 \longrightarrow \boxed{C_1 = \frac{PL^2}{2}}$$

$$\Rightarrow EIy' = \frac{-Px^2}{2} + \frac{PL^2}{2}$$

انتگرال دوم:

$$EIy = \int_0^x \frac{-Px^2}{2} + \frac{PL^2}{2}\,dx = \frac{-Px^3}{6} + \frac{PL^2x}{2} + C_2$$

می‌دانیم y در $x=L$ برابر صفر است.

$$\xrightarrow{x=L} \frac{-PL^3}{6} + \frac{PL^3}{2} + C_2 = 0 \longrightarrow \boxed{C_2 = \frac{-PL^3}{3}}$$

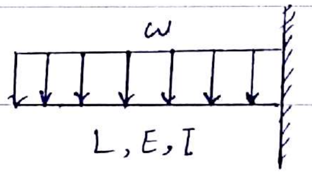
$$EIy = \frac{-Px^3}{6} + \frac{PL^2x}{2} - \frac{PL^3}{3}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{EI}\left(\frac{-Px^3}{6} + \frac{PL^2x}{2} - \frac{PL^3}{3}\right)$$

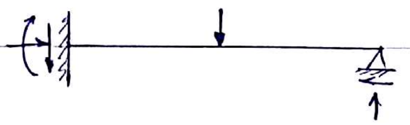
$$\Rightarrow \quad y = \frac{P}{6EI}\left[-x^3 + 3L^2x - 2L^3\right]$$

$$y_{max} = y\big|_{x=0} \Rightarrow y_{max} = \frac{-PL^3}{3EI}$$

تمرین: شکل منحنی تغییر شکل و δ_{max} را بدست آورید.



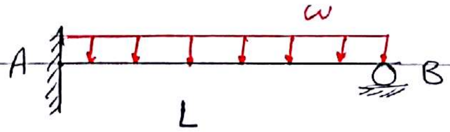
* نکته مهم: با اندکی دقت می‌توان فرم تغییر شکل تیرهای نامعین را نیز بدست آورد.



۲ درجه نامعین

۱ درجه نامعین

مثال:



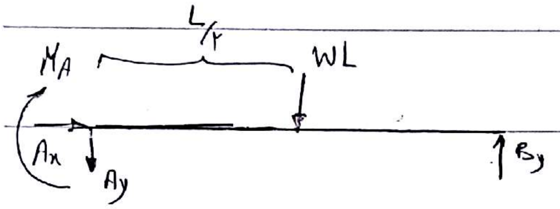
۳ شرط مرزی داریم:

$$\begin{cases} y|_{x=0} = 0 \\ y|_{x=L} = 0 \\ y'|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

درست است که با اضافه شدن قید، مجهولات ما بیشتر از معادلات شده اما چون یک شرط هم به ما داده

($y|_{x=L}=0$) پس سیستم معین است. $4-(1+3)=0$ معین ✓

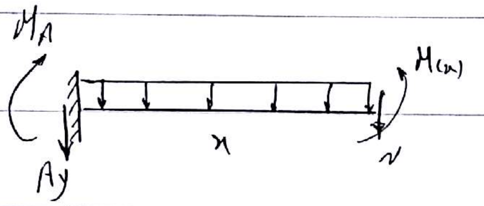
گام ۱: دیاگرام آزاد



$$\sum F_x=0 \longrightarrow A_x=0$$

$$\oplus\uparrow \sum F_y=0 \longrightarrow B_y-A_y-WL=0$$

$$\oplus\circlearrowleft \sum M_A=0 \longrightarrow -M_A-WL\left(\frac{L}{2}\right)+B_yL=0$$



حال در محل x قطع میزنیم:

$$\oplus\circlearrowleft \sum M_c=0 \longrightarrow M_{(x)}-M_A+A_yx+wx\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\longrightarrow \boxed{M_{(x)}=M_A-A_yx-\frac{wx^2}{2}}$$

حال از این معادله ۲ بار انتگرال میگیریم تا y بدست آید. (خود به خود مجهولات هم بدست میآیند)

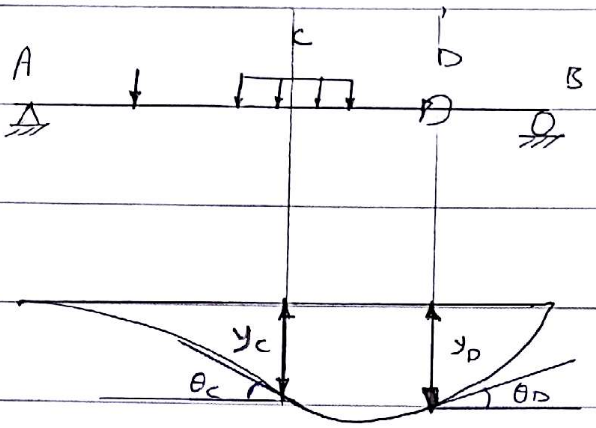
در نهایت:

$$y=\frac{1}{EI}\left[\frac{-WL^2}{20}x^2+\frac{11WL}{120}x^3-\frac{wx^4}{24}\right]$$

تمرین: از ترتیب اولین مثال این فصل و تمرین قبلی، مثال حل شده را دوباره حل کنید.

روش ممان سطح :

یک تیر تحت بارگذاری دلخواه را در نظر بگیرید :



$$\theta = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow d\theta = \frac{M}{EI}\,dx$$

$$\int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,dx \rightarrow \theta\Big|_{\theta_C}^{\theta_D} = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,dx$$

$\theta_D - \theta_C =$ سطح زیر $\frac{M}{EI}$ از C تا D

قضیه اول ممان سطح ⇒

$\theta_D = \theta_C +$ سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ از C تا D

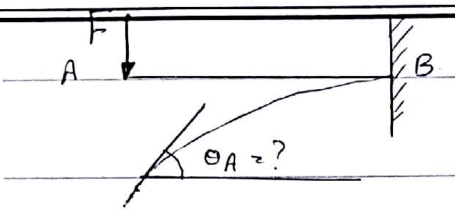
گام ۱ : رسم دیاگرام ممان

گام ۲ : تقسیم کردن دیاگرام ممان بر EI و رسم منحنی $\frac{M}{EI}$

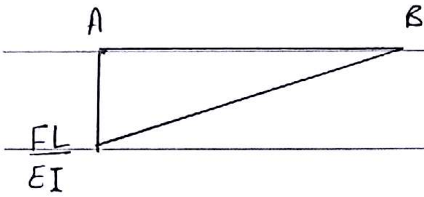
گام ۳ : تعیین نقطه‌ای که θ در آن معلوم است و انتخاب آن به عنوان C

گام ۴ : θ_D به صورت روبرو : $\theta_D = \theta_C +$ سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ از C تا D

مثال : $\theta_A = ?$



دیاگرام ممان تقسیم بر EI :

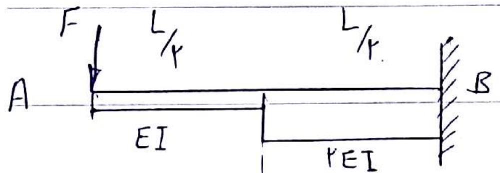


$$\theta_A = \theta_B + \text{سطح زیر منحنی } \frac{M}{EI} \text{ از } A \text{ تا } B$$

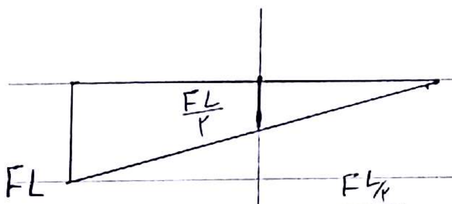
$$\theta_A = 0 + \frac{FL}{EI}(L) \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_A = \frac{FL^2}{2EI}}$$

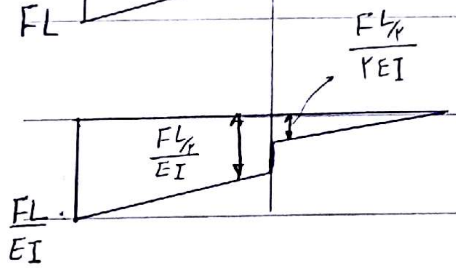
تمرین : $\theta_A = ?$



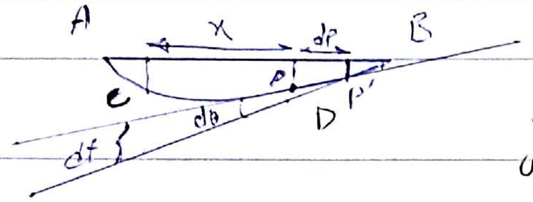
دیاگرام ممان



دیاگرام ممان تقسیم بر EI



قضیه دوم سطح :



زاویه‌هایی که تغییر شکل کوچک است پس طول کمان‌ها با طول‌های افقی

$$\textcircled{1}\quad dt = x \cdot d\theta \quad \Longleftarrow$$ و طول‌های مورب اختلاف چندانی ندارند.

قبلا از مقاومت مصالح یک داشتیم :

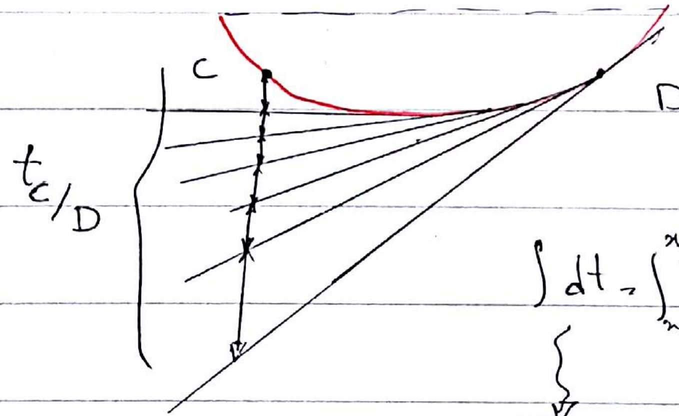
$$y'' = \frac{M}{EI}$$

$$(y')' = \theta' = \frac{d\theta}{dx} \quad \textcircled{2}$$

$$d\theta = \frac{M}{EI}\,dx \xrightarrow{\textcircled{1},\textcircled{2}} dt = \frac{Mx}{EI}\,dx$$

اگر این را از نقطه C تا D در نظر بگیریم، خواهیم داشت :

$$\int dt = \int_{x_C}^{x_D} \frac{xM}{EI}\,dx \quad ; x_C < x < x_D$$



$$\int dt = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,x\,dx$$

$$\Downarrow$$

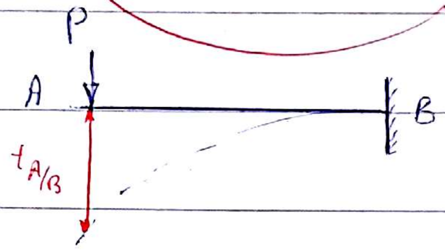
$$t_{C/D}$$

x نسبت به نقطه اولی که در نظر می‌گیریم (C) در نظر گرفته می‌شود.

x در واقع مرکز سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ است.

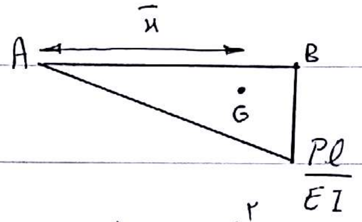
$t_{C/D}$ = فاصله تا مرکز سطح × کل سطح = $\bar{x}$ × سطح زیر $\frac{M}{EI}$ از C تا D

مثال: $t_{A/B} = ?$



$t_{A/B} = \bar{x} \times$ سطح زیر $\frac{M}{EI}$ از A تا B

دیاگرام $\frac{M}{EI}$



$\bar{x}$ = فاصله مرکز سطح $\frac{M}{EI}$ تا A

$= \frac{2}{3} l$

مساحت $= \frac{Pl}{EI} \times l \times \frac{1}{2} = \frac{Pl^2}{2EI}$

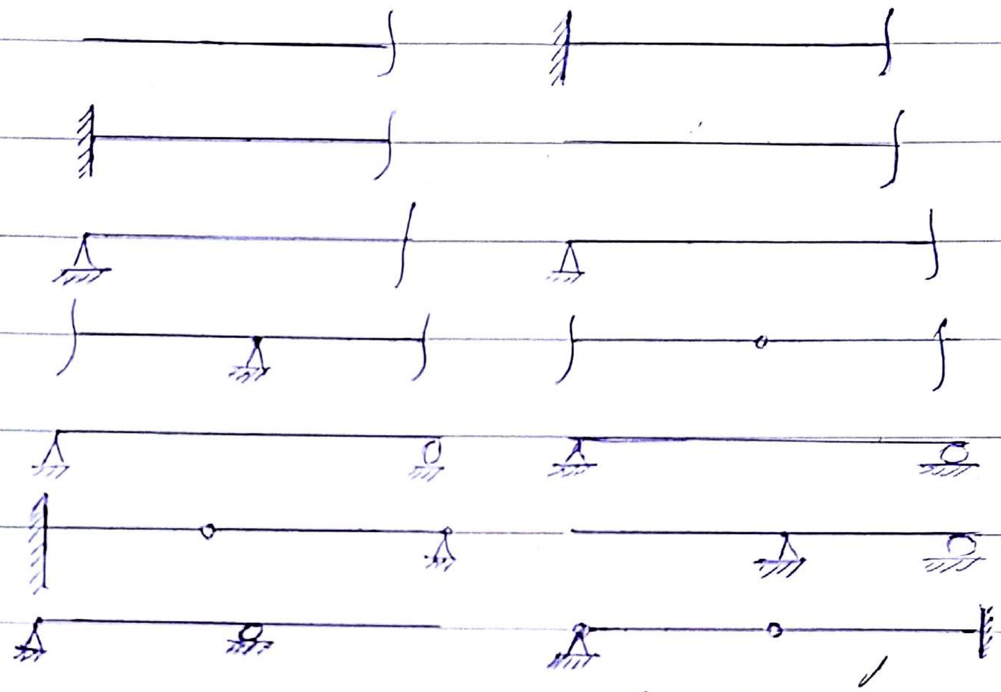
$$\Rightarrow t_{A/B} = \frac{Pl^2}{2EI} \times \frac{2}{3} l = \frac{Pl^3}{3EI}$$

روش تیر مزدوج: (اثبات در جزوه‌ی تحلیل سازه استاد داده شده بود)

هر چند روش گشتاور سطح بسیار ساده است ولی روش ساده‌تر تیر مزدوج نیز برای حل همواره قابل استفاده است.

تعریف: در روش تیر مزدوج مقدار شیب در تیر اصلی برابر است با مقدار برش در تیر مزدوج و مقدار خیز در تیر اصلی برابر است با مقدار ممان در تیر مزدوج. (جواب!)

تیر اصلی — تیر مزدوج



گام ۱ : رسم دیاگرام ممان برای تیر اصلی

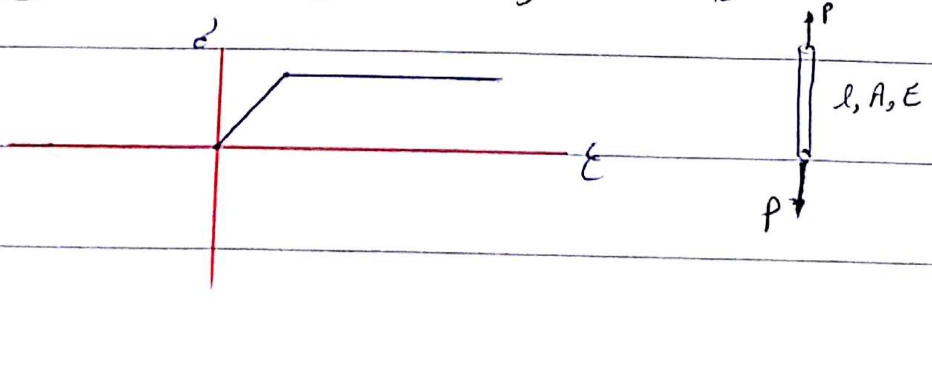
گام ۲ : " تیر مزدوج

" ۳ : بارگذاری $\frac{M}{EI}$ را روی تیر مزدوج می‌گذاریم.

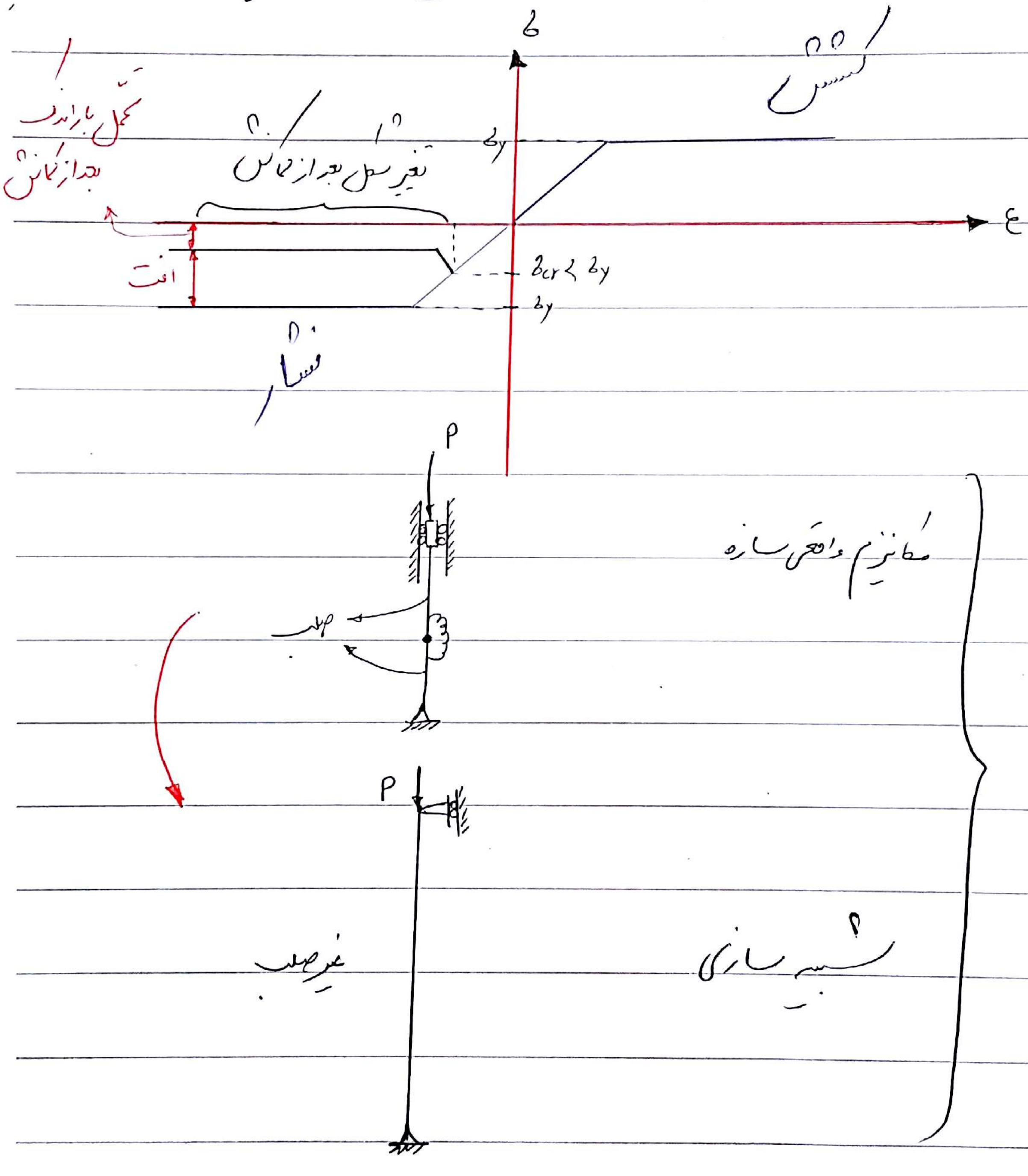
" ۴ : برش در تیر مزدوج ← شیب در تیر اصلی
ممان " " " ← خیز " " "

ستون‌ها :

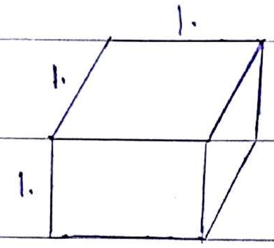
در استاتیک با خرپا آشنا شدیم. در خرپا اعضا به صورت فشاری هستند یا کششی. در مقاومت مصالح ۱ با منحنی تنش ـ کرنش آشنا شدیم. همه‌ی آزمایش‌های مقاومت مصالح با تست کشش میله شروع می‌شود.



حال اگر همین میله را تحت فشار قرار دهیم، منحنی تنش کرنش آن دیگر به شکل صفحه قبل نیست. معمولاً در اثر مکانیزمی که در سازه‌ها دارند، اعضایی هستند که تحمل نیروهای فشاری را بر عهده دارند. رفتار این‌ها با رفتار اعضای کششی بسیار متفاوت است و معمولاً تسلیم نمی‌شوند، بلکه قبل از اینکه به تسلیم برسند در نیروی کمتری کمانش می‌کنند. این اتفاق به صورت ناگهانی رخ می‌دهد و میله دیگر بار را تحمل نمی‌کند ($\sigma_{cr}<\sigma_y$).



در P_{cr} بار بحرانی می‌گویند. زیرا ناپایداری در آن رخ می‌دهد و به صورت ناگهانی یک افت شدید داریم.

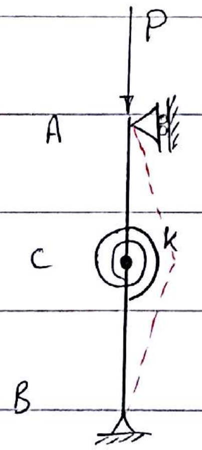


این بتن مسلح (بدون خاموت) در تحت فشار قرار می‌گیرد تسلیم می‌شود و کمانش نمی‌دهد زیرا ابعادش بزرگ است. و در فشار و کشش رفتار یکسانی دارد.

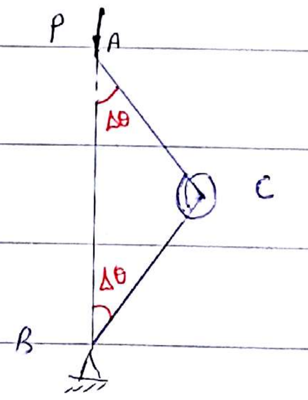
در کمانش تنها اعضایی داریم که خاموت نیستند و تحت نیروی فشاری هستند. هدف ما در این فصل پیدا کردن P_{cr} یا δ_{cr} است. ($P_{cr}=?$ یا $P < P_{cr}$ هست یا نه؟!)

پایداری:
- استاتیک ← سازه تحت بار حرکت نکند.
- ستون (فشار) ← $P_{\text{اعمالی}} < P_{cr}$

هدف:
- $P_{cr}=?$
- بررسی پایداری ($P_{\text{اعمالی}} < P_{cr}$ باشد)

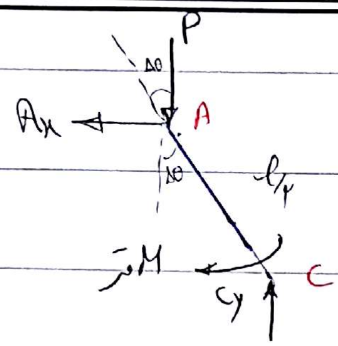


کمانش



شکل اولیه

شکل کمانش یافته



شکل ثانویه به اندازه $2\Delta\theta$ دوران کرده است.

بررسی عضو AC:

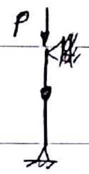
$$\sum F_y = 0 \rightarrow C_y = P$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_C = 0 \rightarrow -M + P\sin\theta\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$\rightarrow M = \frac{Pl}{2}\sin\theta = \frac{Pl}{2}\Delta\theta$$

$$\rightarrow M = \frac{Pl}{2}\cancel{\Delta\theta} = k \times 2\cancel{\Delta\theta} \rightarrow \frac{Pl}{2} = 2k \rightarrow \boxed{P = \frac{4k}{l}}$$



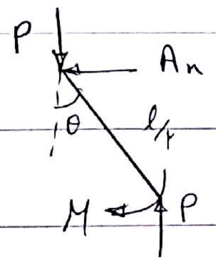
* اگر k صفر باشد: ← پایدار نبود.

* هر چقدر ارتفاع کوتاه‌تر باشد، بیشتر تحمل می‌کند. ← باری که منجر به کمانش شده ← $P_{cr} = \frac{4k}{l}$

— حال اگر $\Delta\theta$ بزرگ باشد دیگر "$\Delta\theta = \sin\Delta\theta$" برقرار نیست ← به اندازه 2θ دوران می‌کند.

در این شرایط P_{cr} چیست؟!

پایداری دارد



$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_C = 0 \rightarrow \left(\frac{l}{2}\right)P\sin\theta - M = 0$$

$$\rightarrow M = P\sin\theta\,\frac{l}{2} \quad (1)$$

از فنر $\rightarrow M = k(2\theta) \quad (2)$

$$\boxed{\frac{Pl}{4k} = \frac{\theta}{\sin\theta}}$$

آیا بیشتر یک P ای وجود داشته باشد که $\theta = 0$ باشد؟! ← بله ممکن است

در $\theta=0$ ، P حتماً از P_{cr} کمتر است. چون اگر P به P_{cr} برسد، کمانش رخ میدهد.

$\theta<0$ هم معنی ندارد.

$\theta \geqslant 0$:

- کوچک: $\frac{PL}{\Sigma k}=1 \longrightarrow P=\frac{\Sigma k}{L}$
- بزرگ: $\frac{PL}{\Sigma k}=\frac{\theta}{\sin\theta}\geqslant 1 \longrightarrow P=\frac{4k}{L}\frac{\theta}{\sin\theta}\geqslant 1$
- صفر: $P<P_{cr}$

$$\boxed{P\geqslant P_{cr}}$$

if:

$$\frac{P}{\frac{4k}{L}}=1 \longrightarrow P=P_{cr}$$

$$\frac{P}{\frac{\Sigma k}{L}}>1 \longrightarrow P>P_{cr}$$

$\frac{\theta}{\sin\theta}$:

- θ وجود داشته باشد $\longrightarrow \frac{\theta}{\sin\theta}>1$
- θ وجود نداشته باشد $\longrightarrow \frac{\theta}{\sin\theta}=0 \longrightarrow (\theta=0)$

$\frac{PL}{\Sigma k}$:

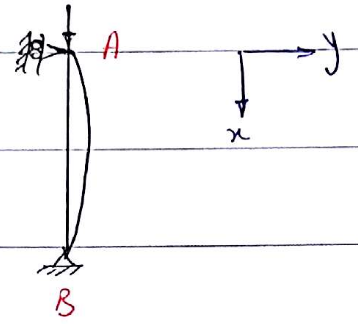
- 0 ؛ $P<P_{cr} \longrightarrow (\theta=0)$
- >1 ؛ $P>P_{cr} \longrightarrow (\theta\neq 0)$

اگر $P>P_{cr}$ باشد، حتماً یک θای وجود دارد $(\theta\neq 0)$

$$P>P_{cr} \longrightarrow \frac{P}{P_{cr}}>1 \longrightarrow \frac{P}{\frac{\Sigma k}{L}}>1 \longrightarrow \frac{\theta}{\sin\theta}>1$$

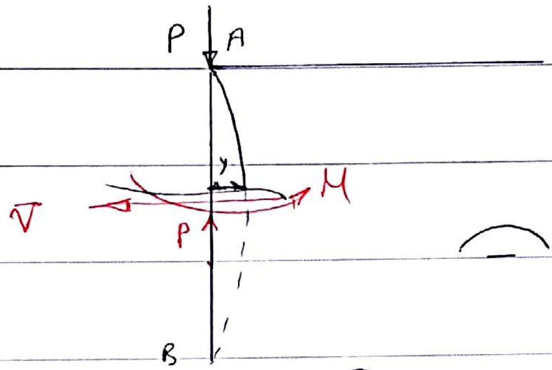
* در لحظه‌ای که P به P_{cr} برسد (در آستانه رسیدن به P_{cr}) هنوز تیر کمانش نمی‌کند.

کمانش ستون الاستیک. (رابطه اویلر)



گام اول: مختصات

گام دوم: دیاگرام آزاد



$A: x=0, y=0 \qquad B: x=L, y=0$

* (M مثبت یعنی تقعر رو به بالا) $\smile^{+}$ $\frown^{-}$

$$\overset{+}{\circlearrowright} \sum M = 0 \longrightarrow M = -Py$$

$$\xrightarrow{\div EI} \frac{M}{EI} = \frac{-Py}{EI} \longrightarrow y'' = \frac{-Py}{EI} \longrightarrow y'' + \frac{P}{EI} y = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل}} y = A\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right)$$

$$\xrightarrow{\text{شرایط مرزی}} \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0 \Longrightarrow B=0 \\ x=L \rightarrow y=0 \Longrightarrow 0 = A\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L\right) \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L = n\pi \Longleftarrow \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L\right) = 0 \Longleftarrow A \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{P}{EI} L^2 = n^2\pi^2 \longrightarrow P_{cr} = \left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) EI$$

نکته: در واقعیت، هیچ وقت P بیشتر از P_{cr} نمی‌شود چون به محض رسیدن به P_{cr} یک حالت شدید ناپایداری می‌شوند و دیگر قادر به تحمل بار بیشتری نیست.

$$n=1 \longrightarrow P_{cr}=\frac{\pi^2}{L^2}EI \longrightarrow \sigma_{cr}=\frac{P_{cr}}{A}=\frac{\pi^2 EI}{AL^2}$$

$$\left(\frac{L}{r}=\text{ضریب لاغری}\right) \qquad \sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \Longleftarrow r=\sqrt{\frac{I}{A}}$$

داشتیم: $y=A\sin n\pi x$

مودهای بارگذاری:

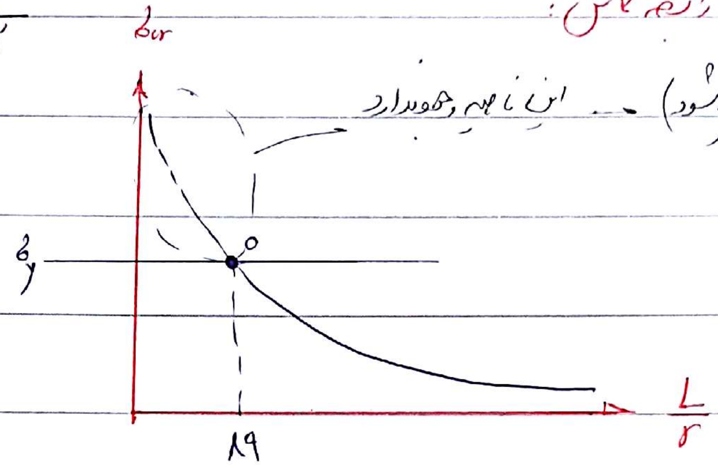
$$\left.\begin{array}{l} n=1 \longrightarrow y=A\sin \pi x \\ n=2 \longrightarrow y=A\sin 2\pi x \\ n=3 \longrightarrow y=A\sin 3\pi x \\ \vdots \end{array}\right\}$$

داشتیم: $\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2}$

σ_{cr} هیچ وقت به σ_y نمی‌رسد، زیرا قبل از آن کمانش می‌کند و شاهد ناپایداری هستیم.

مهم‌ترین رابطه کمانش:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2}$$



تمرین: این منحنی را برای فولاد رسم کنید. ($\pi^2 \simeq 10$, $E = 200\ GPa$)

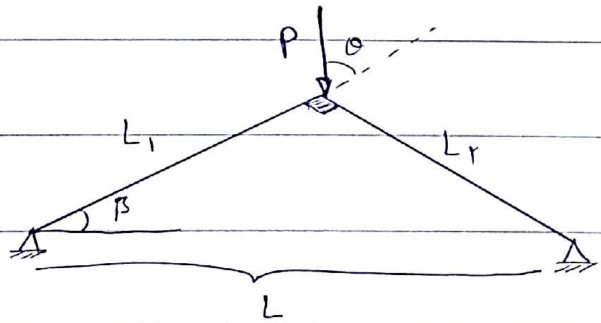
* نکته * اگر L کوچک باشد، σ_{cr} به بی‌نهایت میل می‌کند در نتیجه جسم چاق است.

* در نقطه O تسلیم و کمانش همزمان رخ می‌دهد.

* در واقعیت معمولاً $\frac{L}{r}$ ها بیشتر از ۸۹ است؛ هرچه $\frac{L}{r}$ از ۸۹ بیشتر شود مقدار تنش کمتر می‌شود.

* هرچه مودهای کمانش بالاتر برود (n بیشتر) بهتر است؛ زیرا مقاومت فشاری تیر بالاتر می‌رود.

مثال: $P_{max} = ?$, $\theta = ?$



توضیح:

معادله‌نویسی با کمک مساحت بر حسب کمانش اعضا

وقتی یک عضو کمانش کند، دیگر امکان افزایش P نیست.

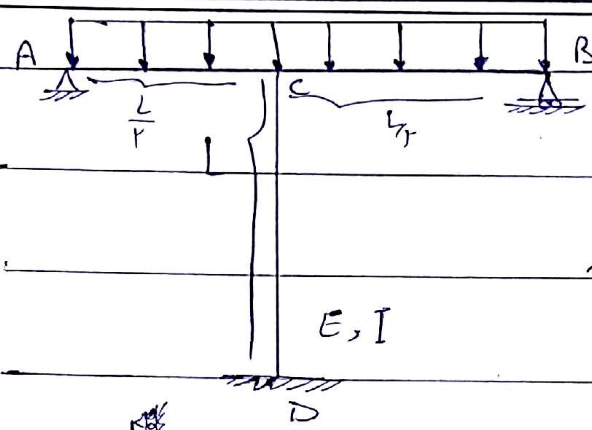
وقتی P بیشینه است که هر دو عضو با هم کمانش کنند.

$$P\cos\theta = P_{cr_1} = \frac{\pi^2 EI}{(L\cos\beta)^2}$$

$$P\sin\theta = P_{cr_2} = \frac{\pi^2 EI}{(L\sin\beta)^2}$$

$\div$: $\cot\theta = \tan^2\beta \rightarrow \theta = \cot^{-1}(\tan^2\beta)$ ✓

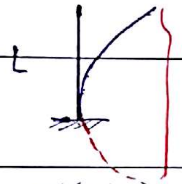
$\rightarrow P_{cr_{max}} = P\cos(\cot^{-1}(\tan^2\beta))$ ✓



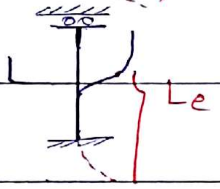
مثال: P چقدر باشد تا ستون کمانش کند؟

در مثال های معمول اساساً منظور از طول کمانش طولی است که ستون با آن کمانش می‌کند. طول کمانش ستون را به صورت زیر نشان داد:

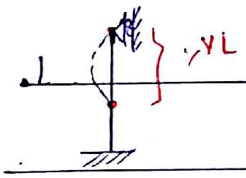
دو سر مفصل $\equiv \quad P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(L)^2}$



یک سر گیردار $\equiv \quad P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$

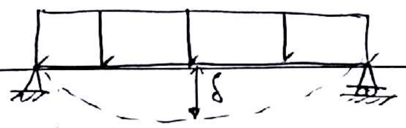


یک سر گیردار یک سر مفصل غلتکی $\equiv \quad P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(L)^2}$



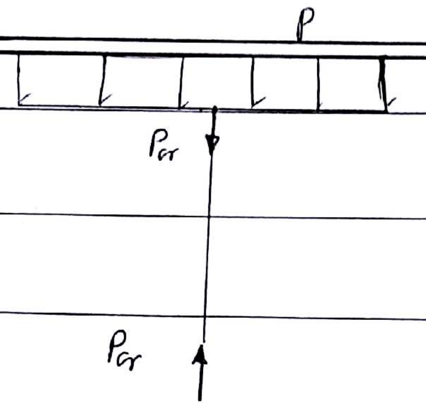
یک سر گیردار یک سر مفصل $\equiv \quad P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}$

حل مثال ۵۱: $\Leftarrow \quad P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}=20.19\frac{EI}{L^2}$



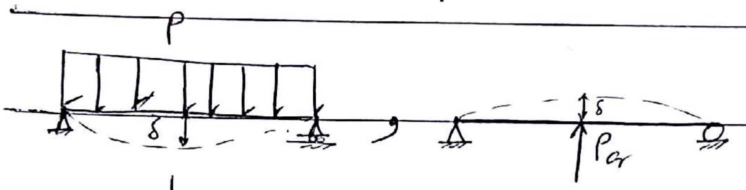
δ را می‌توانیم به روش های انتگرال دوبل و انتگرال سطح بدست آوریم.

$$\Rightarrow \delta=\frac{5PL^4}{384EI}$$



رسم دیاگرام آزاد.

این مثال تبدیل میشود به ۲ مسئله معادل:



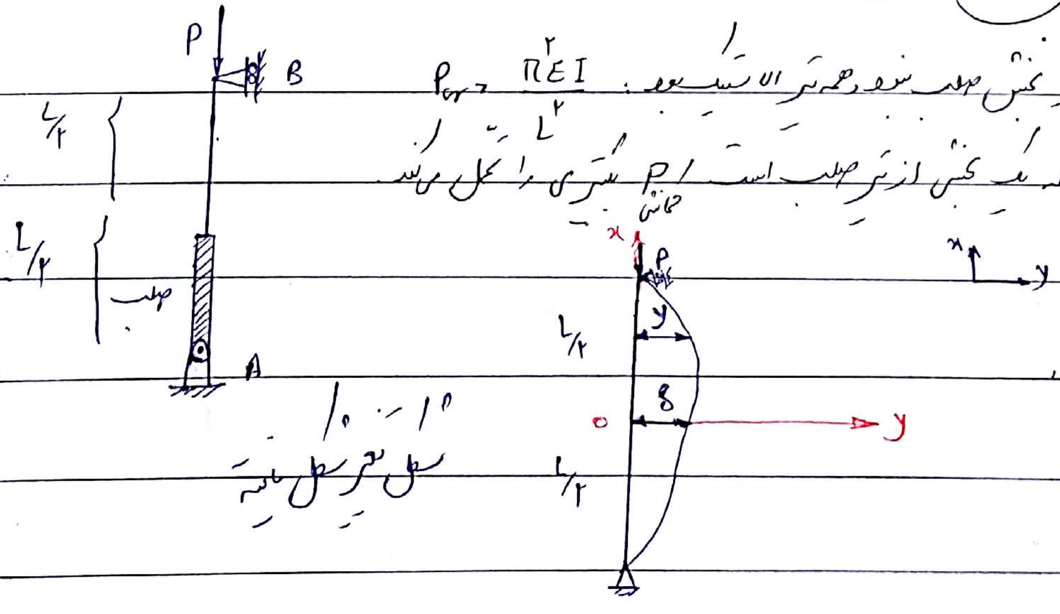
$$\delta = \frac{5PL^4}{384EI} \qquad \delta = \frac{P_{cr}L^3}{48EI}$$

در واقعیت قبل از کمانش هیچ خیزی در تیر وجود نداشته، پس:

$$\frac{5PL^4}{384EI} = \frac{P_{cr}L^3}{48EI} \rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{5}{8}PL} \checkmark$$

نکته: در واقع ما (L_e) طول کمانش را در فرمول $\frac{\pi^2 EI}{(L_e)^2}$ میداریم و L فرضاً طول خود تیر نیست. $\frac{\pi^2 EI}{L^2}$ فقط برای حالت دو سر مفصل صادق است.

مثال: اگر بخش صلب نبود و همه تیر الاستیک بود $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ میشد، حالا که یک بخش از تیر صلب است، P کمانشی تیر را تحمل میکند.



معادله دیفرانسیل : $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

$$EIy'' = -M = -Py \longrightarrow \boxed{y'' + \frac{P}{EI}y = 0}$$

* معادله $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ را از مقاومت مصالح یک می‌دانیم. این معادله همان معادله خمش است. در نتیجه کمانش نوعی خمش است.

سپس شرایط مرزی را می‌نویسیم :

$$\begin{cases} x = \frac{L}{2} \longrightarrow y = 0 \\ x = -\frac{L}{2} \longrightarrow y = 0 \\ x = 0 \longrightarrow (\theta_A)\frac{L}{2} = \delta \longrightarrow y = \delta, \ y'\frac{L}{2} \end{cases}$$

فرض پیشین

حل معادله دیفرانسیل

$$y = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

اعمال شرایط مرزی $\longrightarrow x = 0 \longrightarrow C_2 = \delta$ ✓

$$\longrightarrow y' = C_1\sqrt{\frac{P}{EI}}\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) - C_2\sqrt{\frac{P}{EI}}\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

$x = 0 \longrightarrow y' = \frac{2\delta}{L} \longrightarrow$ $\frac{2\delta}{L} = C_1\sqrt{\frac{P}{EI}} \longrightarrow C_1 = \frac{4\delta^2 EI}{PL^2}$ ✓

$$\Longrightarrow y = \frac{4\delta^2 EI}{PL^2}\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \delta\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

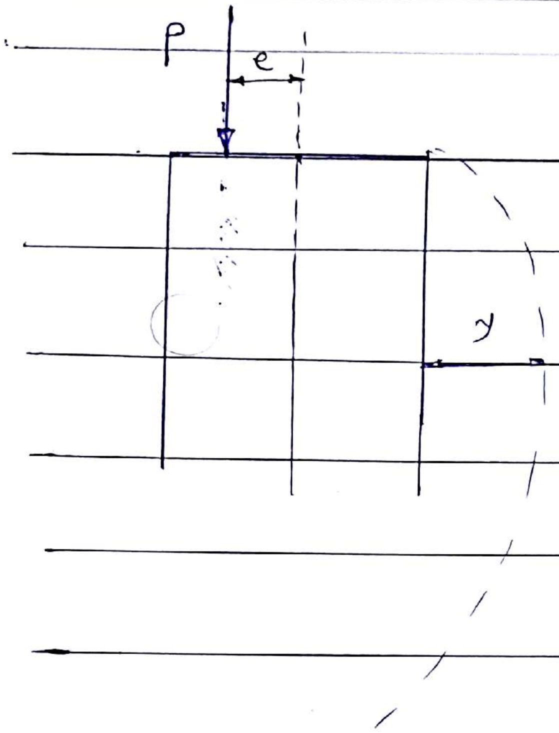
$\left(x = \frac{L}{2} \longrightarrow y = 0\right) \longrightarrow$ $\frac{4\delta^2 EI}{PL^2}\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L/2\right) + \delta\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L/2\right) = 0$

$\tan\alpha = -\alpha \longrightarrow \tan\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L/2\right) = -\frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}} \longleftarrow$ ساده سازی

$P_{cr} = 1.27\,\frac{\pi^2 EI}{L^2} \xLeftarrow{\text{درنهایت}}$ ما حل از طریق عددی α بدست می‌آید.

بار محوری با خروج از مرکزیت:

بار محوری ممکن است دقیقاً به مرکز ستون وارد نشود.



$$\Rightarrow M = Py + Pe$$

حال همین عبارت را در معادله دیفرانسیل گذاشته حل شد.

تمرین ۱: P_{cr} مسئله بالا را بیابید.

نکته:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{(Py+Pe)c}{I}$$

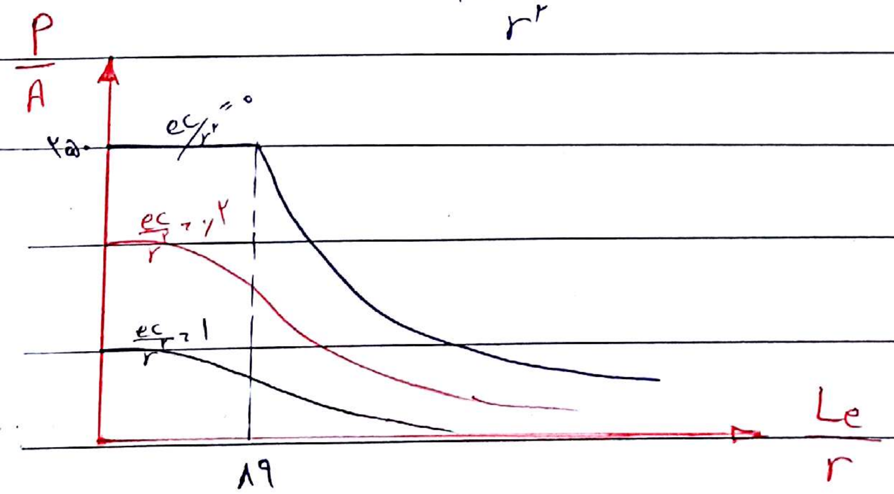
تمرین ۲: با مراجعه به کتاب اثبات کنید:

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{max}}{1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\frac{L_e}{r}\right]}$$

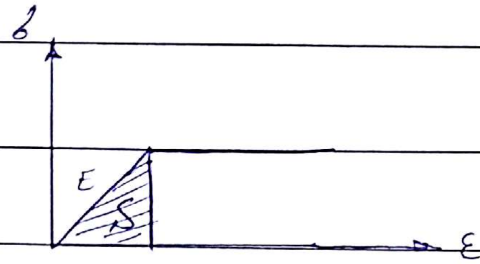
معمولاً $\frac{L_e}{r}$ کوچک است: $\Longleftarrow$

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{max}}{1 + \frac{ec}{r^2}}$$

فرض کنید $\sigma_y = ۲۵۰\,MPa$:



ادامه‌ی انرژی :



$\sigma = E\varepsilon$

$S = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$

$\Rightarrow S = \frac{\sigma^2}{2E}$

انرژی کرنشی واحد حجم $= \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}$

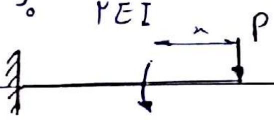
- خمش $\rightarrow \frac{MC}{I}$
- محوری $\rightarrow \frac{P}{A}$
- برشی $\rightarrow \frac{P}{A}$
- پیچش $\rightarrow \frac{TC}{J}$
- برش $\rightarrow \frac{VQ}{It}$

تمرین : اثبات انرژی حالت محوری :
$U = \int_0^L \frac{P^2}{2EA^2}\,dv$

" : " " " " پیچشی :
$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ}\,dx$

" : " " " " خمشی :
$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx$

قضیه کاستیلیانو :

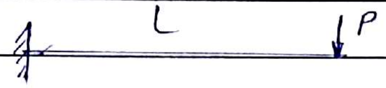


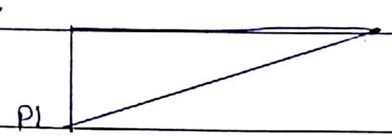
$M = Px$

$U = \int_0^L \frac{(Px)^2}{2EI}\,dx$

قضیه کاستیلیانو $\longrightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = \Delta$ (جابجایی در محل نیرو و در امتداد نیرو)

مثال:





$$U = \int_0^L \frac{(Px)^2}{2EI}dx = \frac{P^2x^3}{6EI}\Big|_0^L = \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad \frac{\partial U}{\partial P} = \Delta = \frac{2PL^3}{6EI} = \frac{PL^3}{3EI}$$

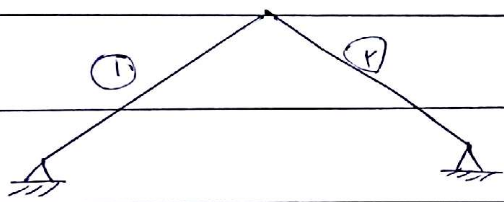
نکته: ممکن است رابطه کاستیگلیانو ساده تر شود:

به جای اینکه ابتدا U را حساب کنیم و سپس نسبت به P از آن مشتق بگیریم:

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M\frac{\partial M}{\partial P}}{EI}dx$$

می دانیم:

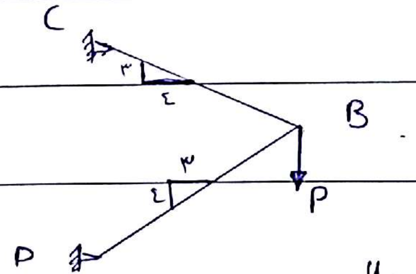
U واحد حجم $= \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2}\frac{P^2}{A^2E} \longrightarrow U_{کل} = \left(\frac{1}{2}\frac{P^2}{A^2E}\right)\underbrace{(A\times L)}_{حجم} = \frac{1}{2}\frac{P^2L}{AE}$



$$U_1 = \frac{\frac{1}{2}P_1^2L_1}{A_1E_1} \qquad U_2 = \frac{\frac{1}{2}P_2^2L_2}{A_2E_2}$$

$$U_{کل} = U_1 + U_2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{P_i^2L_i}{A_iE_i}$$

مثال ۲: Δ_B در راستای افقی و عمودی را بیابید.

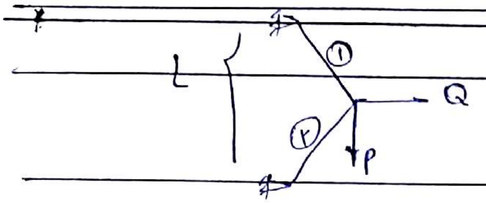


$$\Delta_{B\,عمودی} = \frac{\partial U}{\partial P}$$

$$U_{BC} = \frac{1}{2}\frac{P_1^2L_1}{E_1A_1} \quad , \quad U_{BD} = \frac{1}{2}\frac{P_2^2L_2}{E_2A_2}$$

* از آنجایی که P در راستای قائم است، حل این مسئله به ما Δ قائم (عمودی) نقطه B را می دهد.

برای بدست آوردن Δ افقی نقطه ی B، نیروی مجازی در راستای افقی به B وارد می کنیم. (Q)



گام ۱: در حل خرپا، P_1 و P_2 برحسب Q مشخص میکنیم

گام ۲: تعیین انرژی کل: $u = \frac{1}{2}\frac{P_1^2 L_1}{A_1 E_1} + \frac{1}{2}\frac{P_2^2 L_2}{A_2 E_2}$

گام ۳: قضیه کاستیلیانو: $\Delta_B^{\text{افقی}} = \left.\frac{\partial u}{\partial Q}\right|_{P \neq 0,\, Q=0}$

$BC = 0.6L \,,\, BD = 0.8L$

$P_{BC} = P_1 = 0.6P + 0.8Q \longrightarrow \Delta_B^{\text{افقی}} = \frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{1}{2}\frac{P_1^2(0.6L)}{AE} + \frac{1}{2}\frac{P_2^2(0.8L)}{AE}\right)$

$P_{BD} = P_2 = -0.8P + 0.6Q$

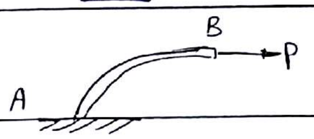
$$\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial Q} = P_1 \overset{0.8}{\left(\frac{\partial P_1}{\partial Q}\right)} \frac{(0.6L)}{AE} + P_2 \overset{0.6}{\left(\frac{\partial P_2}{\partial Q}\right)} \frac{(0.8L)}{AE}$$

$\xrightarrow{Q=0}$ (وجود خارجی ندارد) $\Delta_B^{\text{افقی}} = \frac{\partial u}{\partial Q} = \frac{0.48 P_1 L}{AE} + \frac{0.48 P_2 L}{AE} = \boxed{0.096\, \frac{PL}{AE}}$ ✓

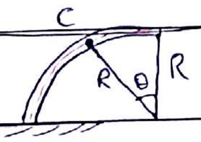
$$\Delta_B^{\text{قائم}} = \frac{\partial u}{\partial P} = P_1 \overset{0.6}{\left(\frac{\partial P_1}{\partial P}\right)} \frac{L_1}{AE} + P_2 \overset{-0.8}{\left(\frac{\partial P_2}{\partial P}\right)} \frac{L_2}{AE}$$

$\xrightarrow{Q=0}$ $\Delta_B^{\text{قائم}} = \boxed{0.728\, \frac{PL}{AE}}$ ✓

مثال: $\Delta_B^{\text{افقی}} = ?$



$u = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx$



$\longrightarrow M_C = Px = P(R - R\cos\theta)$

$$\longrightarrow u = \int_0^L \frac{\left(P(R - R\cos\theta)\right)^2}{2EI}\,dx = \int_0^{\pi/2} M \frac{\partial M}{\partial P}\frac{R}{EI}\,d\theta$$

$$\Delta_B^{\text{افقی}} = \frac{\partial u}{\partial P} = \int_0^{\pi/2} P(R - R\cos\theta)^2 \frac{R}{EI}\,d\theta = \left.\frac{3}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta - 2\sin\theta\right|_0^{\pi/2}$$

$\Longrightarrow \Delta_B^{\text{افقی}} = \boxed{\frac{3\pi}{4} - 2}$ ✓